中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 5 期: 765～774
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

数学问题专栏

涉及二项式系数与调和数的无穷级数

孙智伟

南京大学数学系, 南京 210093
E-mail: zwsun@nju.edu.cn

收稿日期: 2024-01-10; 接受日期: 2024-03-11; 网络出版日期: 2024-03-29
国家自然科学基金 (批准号: 12371004) 资助项目

摘要 本文探讨和项涉及二项式系数与调和数的无穷级数, 在阐述这方面的研究背景后提出一批新的级数等式猜想. 本文包含 64 个猜测出的级数等式, 它们都经 Mathematica 数值检验过.

关键词 级数等式 二项式系数 调和数 超几何级数 Riemann ζ- 函数

MSC (2020) 主题分类 05A19, 11B65, 11M06, 33C20

1 引言

有理数 $H_n=\sum_{0<k\leqslant n}\frac{1}{k}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ 称为调和数. 对于正整数 m, 有理数 $H_n^{(m)}=\sum_{0<k\leqslant n}\frac{1}{k^m}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ 称为 m 阶调和数.

Apéry [2] 证明了 $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 的无理性, 在其证明中涉及中心二项式系数的级数等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}=\frac{2}{5}\zeta(3)$$

起到了关键的作用. Koecher [12] 和 Leshchiner [13, (4a)] 推导出了级数等式

$$\zeta(5)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}\left(\frac{2}{k^2}-\frac{5}{2}H_{k-1}^{(2)}\right).$$

Borwein 和 Bradley [4] 猜测的级数等式

$$\zeta(7)=\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}\left(5H_{k-1}^{(4)}+\frac{1}{k^4}\right)$$

被 Almkvist 和 Granville [1] 在 1999 年证明. Chu [5] 在 2020 年证明了 Sun [17] 猜测的等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}\left(H_k^{(3)}+\frac{1}{5k^3}\right)=\frac{2}{5}\zeta(3)^2.$$

英文引用格式: Sun Z-W. Infinite series involving binomial coefficients and harmonic numbers (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 765–774, doi: 10.1360/SSM-2024-0007

经典的 Ramanujan $\frac{1}{\pi}$ 级数 (参见文献 [14] 与 [7, 第 14 章]) 有下述形式:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(ak+b)\frac{\binom{2k}{k}c_k}{m^k}=\frac{\sqrt{d}}{\pi},$$

其中, a、b 和 m 为整数且 $am\neq 0$, d 为正整数, 并且 c_k 取下述 4 种形式之一:

$$\binom{2k}{k}^2,\quad \binom{2k}{k}\binom{3k}{k},\quad \binom{2k}{k}\binom{4k}{2k},\quad \binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}.$$

如果二元复值函数 F 与 G 满足

$$F(n+1,k)-F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k),\quad n,k\in\mathbb{Z},$$

则称 (F,G) 为一个 Wilf-Zeilberger (WZ) 对. Zeilberger [25] 使用 WZ 对证明了通项分母涉及 3 个二项式系数乘积的级数等式 $\sum_{k=1}^{\infty}(21k-8)/(k\binom{2k}{k})^3=\frac{\pi^2}{6}$, Sun [16] 发现了好几个新的 Zeilberger 型级数等式. Sun [18, 19] 给出了 Ramanujan 型级数与 Zeilberger 型级数的一些变种, 其通项涉及有理函数 (而不是线性函数) 与二项式系数.

Guillera 在文献 [9, (32)] 中用 WZ 方法推导出了通项带调和数的等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(-64)^k}\left((4k+1)H_k-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4\log 2}{\pi},$$

这可视为 Bauer 级数等式 $\sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)\binom{2k}{k}^3/(-64)^k=\frac{2}{\pi}$ 的带调和数变种. Wei [23] 证明了 Guo 和 Lian [10] 猜测的级数等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}(6k+1)\frac{\binom{2k}{k}^3}{256^k}\left(H_{2k}^{(2)}-\frac{5}{16}H_k^{(2)}\right)=\frac{\pi}{12},\quad \sum_{k=0}^{\infty}(6k+1)\frac{\binom{2k}{k}^3}{(-512)^k}\left(H_{2k}^{(2)}-\frac{5}{16}H_k^{(2)}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{48}\pi,$$

这可视为 Ramanujan 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(6k+1)\frac{\binom{2k}{k}^3}{256^k}=\frac{4}{\pi}\quad 与 \quad \sum_{k=0}^{\infty}(6k+1)\frac{\binom{2k}{k}^3}{(-512)^k}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

的带二阶调和数的变种.

受上述工作的启发, 本文作者近两年意识到通项涉及二项式系数的超几何级数等式往往引申出带调和数或高阶调和数的变种, 并在文献 [20, 21] 中提出了许多这方面的级数等式猜想. 这些猜测引发了不少后续研究工作, 近期这方面的代表性文献包括 [3, 11, 24], 所用的工具主要有超几何级数变换公式、WZ 方法、求导算子与符号计算.

设 $(a_k)_{k\geqslant 0}$ 是实数序列. 如果 $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=r\in(-1,1)$, 则称级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 的收敛速率为 r. 这类级数收敛快, 容易检验猜测的级数和取值是否可靠.

本文考察更多的通项涉及二项式系数的超几何级数等式 (有些是本文作者自己新发现的) 带调和数或高阶调和数的变种, 猜测出许多这方面的级数等式 (容易对它们进行数值检验) 以供进一步研究. 本文的猜测依赖作者的直觉以及用来寻求一些量之间整数关系的 PSLQ (partial sum of least squares with decomposition) 算法 (参见文献 [15]). 本文中 Catalan 常数 G 及另一个重要常数 K 如下给出:

$$G=L\left(2,\left(\frac{-4}{\cdot}\right)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2},\quad K=L\left(2,\left(\frac{-3}{\cdot}\right)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(3k+1)^2}-\frac{1}{(3k+2)^2}\right).\tag{1.1}$$

2　和项分母涉及二项式系数的级数恒等式

本节考察和项分母与二项式系数有关的 18 个无穷级数, 并猜测出它们的精确值.

猜想 2.1　我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k((35k^2-29k+6)(H_{2k-1}-H_{k-1})-\frac{4(4k-1)(7k-3)}{5(2k-1)})}{k(3k-1)(3k-2)\binom{4k}{k}}=\frac{3}{10}(2\pi\sqrt{3}\log 3-9K), \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k((35k^2-29k+6)(H_{4k-1}-H_{2k-1})+\frac{2(42k^2-36k+7)}{5(2k-1)})}{k(3k-1)(3k-2)\binom{4k}{k}}=\frac{99}{10}K-\frac{\pi}{5}\sqrt{3}\log 3. \tag{2.2}$$

注 2.1　Au [3] 证明了 Sun [22] 猜测的级数等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(35k^2-29k+6)3^k}{k(3k-1)(3k-2)\binom{4k}{k}}=\sqrt{3}\,\pi.$$

猜想 2.2　我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(5k^2-4k+1)8^k}{k(3k-1)(3k-2)\binom{4k}{k}}=\frac{3\pi}{2}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^k((5k^2-4k+1)(2H_{2k-1}-3H_{k-1})-8k+2)}{k(3k-1)(3k-2)\binom{4k}{k}}=3\pi\log 2-12G, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^k((5k^2-4k+1)(6H_{4k-1}-7H_{2k-1})+22k-10)}{k(3k-1)(3k-2)\binom{4k}{k}}=3\pi\log 2+24G, \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^k((5k^2-4k+1)(2H_{3k-1}-2H_{2k-1}-H_{k-1})+\frac{2(219k^3-249k^2+87k-10)}{3k(3k-1)})}{k(3k-1)(3k-2)\binom{4k}{k}}=\frac{9}{4}\pi^2. \tag{2.6}$$

注 2.2　(2.3) 中级数的收敛速率为 27/32.

猜想 2.3　令 $P(k)=112k^3-116k^2+35k-3$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-16)^k(P(k)(H_{2k-1}-2H_{k-1})-(4k-1)(64k^2-2k-3)/(8k))}{k^2(2k-1)(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{21}{4}\zeta(3)-\pi^2\log 2. \tag{2.7}$$

注 2.3　文献 [6, 例 25] 中公式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-16)^k(112k^3-116k^2+35k-3)}{k^2(2k-1)(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=-\frac{\pi^2}{4}.$$

猜想 2.4　令 $P(k)=828k^3-756k^2+199k-15$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4096^k(P(k)(36H_{6k-1}^{(2)}-9H_{3k-1}^{(2)}-4H_{2k-1}^{(2)}-4H_{k-1}^{(2)})-4(99k^2-27k-8)/k)}{k^3(3k-1)(3k-2)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}^2}=176\pi^4. \tag{2.8}$$

注 2.4　文献 [6, 例 34] 中公式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4096^k(828k^3-756k^2+199k-15)}{k^3(3k-1)(3k-2)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}^2}=48\pi^2.$$

猜想 2.5 令 $\beta(4)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^4}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k+1)(-64)^k}{(2k+1)^2k^2\binom{2k}{k}^3}\left(2H_{2k-1}^{(2)}-H_{k-1}^{(2)}+\frac{2}{(2k+1)^2}\right)=8-16\beta(4), \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-8)^k((8k^2+5k+1)(H_{2k-1}^{(2)}-\frac{5}{4}H_{k-1}^{(2)})+\frac{4k(k+1)(3k+1)}{(2k+1)^2})}{(2k+1)^2k^3\binom{2k}{k}^3}=4-6\beta(4), \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-8)^k}{\binom{2k}{k}^3}\left((18k^2-11k+6)\left(H_{2k-1}^{(2)}-\frac{5}{4}H_{k-1}^{(2)}\right)-\frac{13}{k}\right)=\frac{2}{3}(\beta(4)+G-1). \tag{2.11}$$

注 2.5 Guillera [8] 使用 WZ 方法推导出了等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k-1)(-64)^k}{k^3\binom{2k}{k}^3}=-16G \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k-1)(-8)^k}{k^3\binom{2k}{k}^3}=-2G.$$

这启发本文作者在文献 [18, (1.75) 与 (1.78)] 与 [19, (T2)] 中证明了

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(8k^2+5k+1)(-8)^k}{(2k+1)^2k^3\binom{2k}{k}^3}=4-6G,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k+1)(-64)^k}{(2k+1)^2k^2\binom{2k}{k}^3}=4-8G,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P(k)(-8)^k}{\binom{2k}{k}^3}=\frac{2}{3}(G+4),$$

其中 $P(k)=18k^2-11k+6$.

猜想 2.6 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(28k^2+31k+8)(H_{2k-1}-H_{k-1})-7k-5/2}{(2k+1)^2k^3\binom{2k}{k}^3}=3\zeta(3)-\frac{3}{2}\pi^2+12 \tag{2.12}$$

与

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(198k^2-227k+47)(H_{2k}-H_k)-66k+227/6}{\binom{2k}{k}^3}=-\frac{16\zeta(3)+53}{42}. \tag{2.13}$$

注 2.6 受 Zeilberger 等式 $\sum_{k=1}^{\infty}(21k-8)/(k\binom{2k}{k})^3=\frac{\pi^2}{6}$ 的启发, 本文作者在文献 [18,19] 中证明了

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{28k^2+31k+8}{(2k+1)^2k^3\binom{2k}{k}^3}=\frac{\pi^2-8}{2} \quad 与 \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{198k^2-227k+47}{\binom{2k}{k}^3}=\frac{4}{63}(816-\pi^2).$$

猜想 2.7 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16^k}{(2k+1)^2k^3\binom{2k}{k}^3}\left((3k+1)(H_{2k-1}-2H_{k-1})-\frac{1}{2}\right)=8-\pi^2+\pi^2\log 2-\frac{7}{2}\zeta(3), \tag{2.14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16^k}{(2k+1)^2k^3\binom{2k}{k}^3}\left((3k+1)H_{k-1}^{(2)}+\frac{1}{2k}\right)=8-\pi^2+\frac{\pi^4}{48}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16^k}{\binom{2k}{k}^3}\left((6k^2-13k-2)\left(2H_{2k}-H_k\right)-8k+\frac{13}{3}\right)=\frac{1-\pi^2}{9}-\frac{7}{6}\zeta(3), \tag{2.16}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16^k}{\binom{2k}{k}^3}\left((6k^2-13k-2)\left(H_{2k}^{(2)}-\frac{5}{4}H_k^{(2)}\right)+2\right)=-\frac{4}{3}+\frac{5}{12}\pi^2-\frac{\pi^4}{144}, \tag{2.17}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16^k}{\binom{2k}{k}^3}\left((6k^2-13k-2)\left(H_{2k}^{(3)}+\frac{7}{8}H_k^{(3)}\right)-6+\frac{3}{k}\right)=-2-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}\zeta(3). \tag{2.18}$$

注 2.7 Guillera [8] 使用 WZ 方法推导出了 $\sum_{k=1}^{\infty}(3k-1)16^k/(k\binom{2k}{k})^3=\frac{\pi^2}{2}$. 受此启发, 本文作者在文献 [18, (1.77)] 与 [19, (T4)] 中分别证明了

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k+1)16^k}{(2k+1)^2k^3\binom{2k}{k}^3}=\frac{\pi^2-8}{2}\quad \text{与}\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6k^2-13k-2)16^k}{\binom{2k}{k}^3}=\frac{16-\pi^2}{12}.$$

3 和项分子涉及二项式系数的级数恒等式

本节考察和项分子与二项式系数有关的 20 个无穷级数, 并猜测出它们的精确值.

猜想 3.1 我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(22k^2-18k+3)\binom{4k}{k}}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)16^k}=-\frac{1}{3}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(24k^2-4k-3)\binom{4k}{k}}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)128^k}=\frac{5}{6}\sqrt{2}. \tag{3.2}$$

此外, 还有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{4k}{k}((22k^2-18k+3)(2H_{3k}-5H_k)-\frac{2}{3}(43k-14))}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)16^k}=-\frac{4}{9}(11+3\log 2), \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{4k}{k}((22k^2-18k+3)(2H_{4k}-H_{2k}-3H_k)-\frac{2(3k-1)(64k^2-56k+9)}{(4k-1)(4k-3)})}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)16^k}=-\frac{2}{3}(5+2\log 2). \tag{3.4}$$

注 3.1 文献 [6, 例 100] 中公式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(112k^2-114k+25)\binom{4k}{k}}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)(-256)^k}=-\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

注意 $8k(112k^2-114k+25)+14k-3=896k^3-912k^2+214k-3$. 归纳易见, 对 $n=0,1,2,\dots$ 有等式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(896k^3-912k^2+214k-3)\binom{4k}{k}}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)(-256)^k}=\frac{\binom{4n}{n}}{(-256)^n}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(896k^3-912k^2+214k-3)\binom{4k}{k}}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)(-256)^k}=0\quad \text{且}\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(14k-3)\binom{4k}{k}}{(2k-1)(4k-1)(4k-3)(-256)^k}=\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

猜想 3.2 我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^2256^k}\left((12k^2-1)H_k+\frac{16k^2}{2k-1}\right)=\frac{4\log 2}{\pi}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^2256^k}\left((12k^2-1)H_{2k}+8k+2+\frac{8}{3(2k-1)}\right)=\frac{4\log 2}{3\pi}, \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^3256^k}\left(k(6k-1)(H_{2k}-H_k)-k-\frac{7}{6}-\frac{1}{2k-1}\right)=\frac{2\log 2}{3\pi}, \tag{3.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3\binom{2k}{k}^3}{256^k}\left((6k^2-19k+6)(H_{2k-1}-H_{k-1})+2k-\frac{19}{6}\right)=-\frac{\log 2}{9\pi}, \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3\binom{2k}{k}^3}{256^k}\left((6k^2-19k+6)(16H_{2k-1}^{(2)}-5H_{k-1}^{(2)})+2-\frac{5}{k}\right)=-\frac{\pi}{36}. \tag{3.9}$$

注 3.2 受 Ramanujan 级数等式 $\sum_{k=0}^{\infty}(6k+1)\binom{2k}{k}^3/256^k=\frac{4}{\pi}$ 的启发, 本文作者在文献 [18, (1.3)] 与 [19, (S1)] 中分别证明了

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(12k^2-1)\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^2 256^k}=-\frac{2}{\pi} \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(6k^2-19k+6)k^3\binom{2k}{k}^3}{256^k}=-\frac{1}{12\pi}.$$

猜想 3.3 我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^2(-512)^k}\left((28k^2-4k-1)(H_{2k}-H_k)-4-\frac{8}{3(2k-1)}\right)=-\frac{9\log 2}{\sqrt{2}\,\pi}, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^3(-512)^k}\left((30k^2+3k-2)(H_{2k}-H_k)-5k-\frac{17}{2}-\frac{7}{2k-1}\right)=\frac{81\sqrt{2}\log 2}{16\pi}, \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3\binom{2k}{k}^3}{(-512)^k}\left((18k^2-29k+16)(H_{2k}-H_k)-273k+\frac{998}{3}-\frac{128}{2k-1}\right)=\frac{\sqrt{2}\log 2}{16\pi}. \tag{3.12}$$

注 3.3 受 Ramanujan 级数等式 $\sum_{k=0}^{\infty}(6k+1)\binom{2k}{k}^3/(-512)^k=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 的启发, 本文作者在文献 [18, (1.5) 和 (1.6)] 中证明了

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(28k^2-4k-1)\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^2(-512)^k}=-\frac{3\sqrt{2}}{\pi} \quad 与 \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(30k^2+3k+2)\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^3(-512)^k}=\frac{27\sqrt{2}}{8\pi},$$

还在文献 [19, (S2)] 中推导出了

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(18k^2-29k+16)k^3\binom{2k}{k}^3}{(-512)^k}=\frac{\sqrt{2}}{24\pi}.$$

猜想 3.4 我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^2 4096^k}\left((28k^2-4k-1)(H_{2k}-H_k)-4-\frac{8}{3(2k-1)}\right)=-\frac{6\log 2}{\pi}, \tag{3.13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^3 4096^k}\left((42k^2-3k-1)(H_{2k}-H_k)-7k-\frac{19}{2}-\frac{8}{2k-1}\right)=\frac{27\log 2}{4\pi}, \tag{3.14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3\binom{2k}{k}^3}{4096^k}\left((198k^2-425k+210)(H_{2k-1}-H_{k-1})+66k-\frac{425}{6}\right)=-\frac{2\log 2}{21\pi}. \tag{3.15}$$

注 3.4 受 Ramanujan 级数等式 $\sum_{k=0}^{\infty}(42k+5)\binom{2k}{k}^3/4096^k=\frac{16}{\pi}$ 的启发, 作者在文献 [18, (1.7) 和 (1.8)] 中证明了

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(28k^2-4k-1)\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^2 4096^k}=-\frac{3}{\pi} \quad 与 \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(42k^2-3k-1)\binom{2k}{k}^3}{(2k-1)^3 4096^k}=\frac{27}{8\pi},$$

还证明了 (参见文献 [19, (S3)])

$$\sum_{k=1}^{\infty}(198k^2-425k+210)\frac{k^3\binom{2k}{k}^3}{4096^k}=-\frac{1}{21\pi}.$$

猜想 3.5 我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k+7)(3H_{2k}-2H_k)+19(6k+1)/(2k+1))}{(2k+1)4096^k}=32\log 2, \tag{3.16}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k+7)(2H_{6k}-H_{3k}-H_k)+20/(2k+1))}{(2k+1)4096^k}=32\log 2, \tag{3.17}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k+7)H_k^{(2)}+260(6k+1)/(2k+1)^2)}{(2k+1)4096^k}=\frac{80}{3}\pi^2, \tag{3.18}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k+7)H_{2k}^{(2)}+205(6k+1)/(3(2k+1)^2))}{(2k+1)4096^k}=\frac{64}{9}\pi^2, \tag{3.19}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k+7)(9H_{2k}^{(3)}-H_k^{(3)})-201(6k+1)/(2k+1)^3)}{(2k+1)4096^k}=-160\zeta(3). \tag{3.20}$$

注 3.5 文献 [6, 例 60] 中公式等价于

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(74k+7)\binom{2k}{k}\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}{(2k+1)4096^k}=8.$$

4 和项分子分母都涉及二项式系数的级数恒等式

本节考察和项分子分母都与二项式系数有关的 26 个无穷级数, 并猜测出它们的精确值.

猜想 4.1 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(333k^3-753k^2+208k-15)\frac{\binom{3k}{k}}{k^2\binom{2k}{k}^2}=81-\pi^2, \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(45k^3-417k^2+104k-8)\frac{2^k\binom{3k}{k}}{k^2\binom{2k}{k}^2}=81-\frac{3}{2}\pi^2. \tag{4.2}$$

注 4.1 (4.1) 与 (4.2) 中两个级数的收敛速率分别为 27/64 与 27/32.

猜想 4.2 我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(128k^2+40k-7)\binom{4k}{2k}}{(2k+1)9^k\binom{2k}{k}^2}=\sqrt{3}\,\pi, \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}((128k^2+40k-7)(5H_{2k}-4H_k)-(416k^2+448k+113)/(2k+1))}{(2k+1)9^k\binom{2k}{k}^2}=27K-108, \tag{4.4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}((128k^2+40k-7)(H_{2k}^{(2)}-\frac{5}{2}H_k^{(2)})+4(4k+1)(8k+5)/(2k+1)^2)}{(2k+1)9^k\binom{2k}{k}^2}=\frac{\pi^3}{4\sqrt{3}}. \tag{4.5}$$

注 4.2 (4.3) 中级数的收敛速率为 1/9.

猜想 4.3 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(40k^2-20k+3)2^k\binom{4k}{2k}}{k(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{\pi}{2},\tag{4.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}2^k((40k^2-20k+3)(2H_{6k-1}-H_{3k-1}-H_{k-1})-32k+4)}{k(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=2G+\frac{\pi}{2}\log 2.\tag{4.7}$$

注 4.3 (4.6) 中级数的收敛速率为 2/27.

猜想 4.4 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(64k^2-48k+7)3^k\binom{4k}{2k}}{k(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},\tag{4.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}3^k((64k^2-48k+7)(5H_{2k-1}-4H_{k-1})-\frac{2(6k-1)(24k-13)}{2k-1})}{k(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{4}{3}\pi\sqrt{3}\log 3-9K,\tag{4.9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}3^k((64k^2-48k+7)(10H_{6k-1}-5H_{3k-1}-3H_{k-1})-\frac{8f(k)}{6k-3})}{k(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}\log 3+32K,\tag{4.10}$$

其中 $f(k)=96k^2-78k+17$.

注 4.4 (4.8) 中级数的收敛速率为 1/9.

猜想 4.5 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}16^k((22k^2-17k+3)(H_{2k-1}^{(2)}-\frac{3}{16}H_{k-1}^{(2)})-3(6k-1)/(4k-2))}{k(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{\pi^3}{12}.\tag{4.11}$$

注 4.5 文献 [6, 例 47] 中公式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(22k^2-17k+3)16^k\binom{4k}{2k}}{k(4k-1)(4k-3)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=2\pi.$$

猜想 4.6 令 $P(k)=112k^3-8k^2-6k+1$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}^2(P(k)(6H_{2k-1}^{(2)}-H_{k-1}^{(2)})-172k^2(6k-1)/(2k-1)^2)}{(2k-1)^3k^2\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{11}{60}\pi^4,\tag{4.12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}^2(P(k)(7H_{2k-1}^{(3)}-H_{k-1}^{(3)})-136k^2(6k-1)/(2k-1)^3)}{(2k-1)^3k^2\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{11}{12}(45\zeta(5)-4\pi^2\zeta(3)).\tag{4.13}$$

注 4.6 文献 [6, 例 93] 中公式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(112k^3-8k^2-6k+1)\binom{2k}{k}^2}{(2k-1)^3k^2\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}=\frac{2}{3}\pi^2.$$

猜想 4.7 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}((60k^2-43k+8)H_{k-1}^{(3)}-(184k^2-114k+19)/(8k^2(2k-1)))}{(4k-1)k^3\binom{2k}{k}^4}=\frac{\pi^2}{3}\zeta(3)-5\zeta(5),\tag{4.14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}((60k^2-43k+8)H_{2k-1}^{(3)}+(584k^2-390k+65)/(8k^2(2k-1)))}{(4k-1)k^3\binom{2k}{k}^4}=30\zeta(5)-2\pi^2\zeta(3), \tag{4.15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{4k}{2k}((60k^2-43k+8)(2H_{2k-1}^{(4)}+H_{k-1}^{(4)})-25(4k-1)/(8k^3))}{(4k-1)k^3\binom{2k}{k}^4}=\frac{11}{1890}\pi^6. \tag{4.16}$$

注 4.7 文献 [6, 例 14] 给出的等式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(60k^2-43k+8)\binom{4k}{2k}}{(4k-1)k^3\binom{2k}{k}^4}=\frac{\pi^2}{3}.$$

猜想 4.8 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{6k}{3k}((69k^2-40k+6)(H_{2k-1}-H_{k-1})+3(4k-1)/(4k-2))}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=6\zeta(3), \tag{4.17}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{6k}{3k}((69k^2-40k+6)H_{3k-1}-(282k^2-206k+37)/(12k-6))}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=6\zeta(3), \tag{4.18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{6k}{3k}((69k^2-40k+6)(2H_{3k-1}+H_{2k-1}-H_{k-1})-47k+83/6)}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=18\zeta(3), \tag{4.19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{6k}{3k}((69k^2-40k+6)H_{k-1}^{(2)}+(66k-17)/(6k))}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=\frac{\pi^4}{45}, \tag{4.20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{6k}{3k}((69k^2-40k+6)H_{2k-1}^{(2)}+(7k-2)(39k^2-32k+7)/(3k(2k-1)^2))}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=\frac{\pi^4}{9}, \tag{4.21}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{6k}{3k}((69k^2-40k+6)H_{3k-1}^{(2)}+(33k-19)/(9k))}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=\frac{4}{45}\pi^4. \tag{4.22}$$

此外, 对于 $P(k)=852k^4-1096k^3+564k^2-132k+11$, 还有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{6k}{3k}((69k^2-40k+6)(6H_{2k-1}^{(3)}+7H_{k-1}^{(3)})+P(k)/(2k^2(2k-1)^3))}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=60\zeta(5). \tag{4.23}$$

注 4.8 文献 [6, 例 32] 给出的等式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(69k^2-40k+6)\binom{6k}{3k}}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^3\binom{3k}{k}}=\frac{2}{3}\pi^2.$$

猜想 4.9 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k^2-47k+8)H_{2k-1}-17k+11/2)}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^5}=18\zeta(3), \tag{4.24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k^2-47k+8)(200H_{2k-1}^{(2)}-137H_{k-1}^{(2)})-168/k)}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^5}=\frac{526}{15}\pi^4, \tag{4.25}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}((74k^2-47k+8)(6H_{2k-1}^{(3)}+H_{k-1}^{(3)})+21(6k-1)/(4k^2))}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^5}=12\pi^2\zeta(3). \tag{4.26}$$

注 4.9 文献 [6, 例 52] 给出的等式有下述等价形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(74k^2-47k+8)\binom{3k}{k}\binom{6k}{3k}}{(6k-1)k^3\binom{2k}{k}^5}=2\pi^2.$$

参考文献

1 Almkvist G, Granville A. Borwein and Bradley's Apérv-like formulae for $\zeta(4n+3)$. Exp Math, 1999, 8: 197–203
2 Apéry R. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Astérisque, 1979, 61: 11–13
3 Au K C. Wilf-Zeilberger seeds and nontrivial hypergeometric identities. arXiv:2312.14051, 2023
4 Borwein J M, Bradley D M. Empirically determined Apéry-like formulae for $\zeta(4n+3)$. Exp Math, 1997, 6: 181–194
5 Chu W. Alternating series of Apéry type for the Riemann zeta function. Contrib Discrete Math, 2020, 15: 108–116
6 Chu W, Zhang W. Accelerating Dougall's ${}_5F_4$-sum and infinite series involving π. Math Comp, 2014, 83: 475–512
7 Cooper S. Ramanujan's Theta Functions. Cham: Springer, 2017
8 Guillera J. Hypergeometric identities for 10 extended Ramanujan-type series. Ramanujan J, 2008, 15: 219–234
9 Guillera J. More hypergeometric identities related to Ramanujan-type series. Ramanujan J, 2013, 32: 5–22
10 Guo V J W, Lian X. Some q-congruences on double basic hypergeometric sums. J Difference Equ Appl, 2021, 27: 453–461
11 Hou Q H, Sun Z W. Taylor coefficients and series involving harmonic numbers. arXiv:2310.03699, 2023
12 Koecher M. Letter (in German). Math Intelligencer, 1979/1980, 2: 62–64
13 Leshchiner D. Some new identities for $\zeta(k)$. J Number Theory, 1981, 13: 355–362
14 Ramanujan S. Modular equations and approximations to π. In: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan. Providence: AMS Chelsea Publ, 2000, 23–39
15 Straub A. A gentle introduction to PSLQ. Https://arminstraub.com/downloads/math/pslq.pdf, 2010
16 Sun Z W. Super congruences and Euler numbers. Sci China Math, 2011, 54: 2509–2535
17 Sun Z W. New series for some special values of L-functions. Nanjing Univ J Math Biquarterly, 2015, 32: 189–218
18 Sun Z W. New series for powers of π and related congruences. Electron Res Arch, 2020, 28: 1273–1342
19 Sun Z W. New type series for powers of π. J Comb Number Theory, 2020, 12: 157–208
20 Sun Z W. Series with summands involving harmonic numbers. In: Combinatorial and Additive Number Theory VI. New York: Springer, 2024, in press. arXiv:2210.07238, 2022
21 Sun Z W. New series involving binomial coefficients. arXiv:2307.03086, 2023
22 Sun Z W. Four new series for π and related identities involving harmonic numbers. Question 456528 at MathOverflow, Oct. 16, 2023. Https://mathoverflow.net/questions/456528
23 Wei C. On two double series for π and their q-analogues. Ramanujan J, 2023, 60: 615–625
24 Wei C, Xu C. On two conjectural series involving Riemann zeta function. arXiv:2310.04642, 2023
25 Zeilberger D. Closed form (pun intended!). In: A Tribute to Emil Grosswald: Number Theory and Related Analysis. Contemporary Mathematics, vol. 143. Providence: Amer Math Soc, 1993, 579–607

Infinite series involving binomial coefficients and harmonic numbers

Zhi-Wei Sun

Abstract In this paper, we study infinite series with summands involving both binomial coefficients and harmonic numbers. After a review of the backgrounds, we pose a lot of new conjectures on series identities. This paper contains 64 conjectural series identities which have been checked numerically via Mathematica.

Keywords series identities, binomial coefficients, harmonic numbers, hypergeometric series, Riemann ζ-function

MSC(2020) 05A19, 11B65, 11M06, 33C20

doi: 10.1360/SSM-2024-0007