中国科学: 数学　2024 年　第 54 卷　第 9 期: 1357～1364
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论　文

一个新的关于素数的不等式

献给陆洪文教授 85 寿辰

孙智伟

南京大学数学学院, 南京 210093
E-mail: zwsun@nju.edu.cn

收稿日期: 2023-11-30; 接受日期: 2024-05-15; 网络出版日期: 2024-06-18
国家自然科学基金 (批准号: 12371004) 资助项目

摘要　对正整数 n, 令 p_n 表示第 n 个素数. 对整数 $n \geqslant 125$, 本文建立新的不等式 $p_n > n+\sum_{k=1}^{n} p_k/k$, 并证明它强于 Mandl 的不等式 $\sum_{k=1}^{n} p_k < np_n/2$.

关键词　素数　第 n 个素数　不等式

MSC (2020) 主题分类　11A41

1　引言

对于正整数 n, 令 p_n 表示第 n 个素数. Robert Mandl 曾猜测, 对于整数 $n \geqslant 9$, 有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} p_k < \frac{np_n}{2}. \tag{1.1}$$

Rosser 和 Schoenfeld [4] 在 1975 年声称证明了 Mandl 猜测, 但他们从未发表过证明细节. Dusart [1] 首次详细证明了 Mandl 猜测的不等式 (1.1). Hassani [3] 证明了更强的结果: 对于整数 $n \geqslant 10$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} p_k < \frac{np_n}{2} - \frac{n^2}{14}. \tag{1.2}$$

Sun [5] 证明了序列 $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k)^{1/n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ 严格递减. 对于任意正实数 α 及整数 $n \geqslant 2\lceil\alpha\rceil^2+\lceil\alpha\rceil+6$ (其中 $\lceil\alpha\rceil$ 表示大于或等于 α 的最小整数), 文献 [6, 猜想 2.1] 猜测有不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k^{\alpha} < \frac{p_n^{\alpha}}{\alpha+1}.$$

受上述工作启发, 本文建立一个新的关于素数的不等式.

英文引用格式: Sun Z-W. A new inequality for primes (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1357–1364, doi: 10.1360/SSM-2023-0328

　

定理 1.1 任给整数 $n \geqslant 125$, 有不等式

$$p_n > n + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k}. \tag{1.3}$$

注 1.1 不等式 (1.3) 在 $n = 124$ 时不成立. 事实上,

$$p_{124} - 124 - \sum_{k=1}^{124} \frac{p_k}{k} \approx -0.133567.$$

下述结果表明不等式 (1.3) 强于 Mandl 不等式 (1.1) 与 Hassani 的改进 (1.2).

定理 1.2 (i) 任给 $\delta > 0.5$, 对于充分大的正整数 n, 有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k} > \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k - \delta n. \tag{1.4}$$

(ii) 对于整数 $n \geqslant 3$, 有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k} > \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k - 0.6553n. \tag{1.5}$$

将定理 1.1 与 1.2 结合起来可得下述推论.

推论 1.1 (i) 任给 $d > 4$, 对于充分大的正整数 n, 有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} p_k < \frac{np_n}{2} - \frac{n^2}{d}. \tag{1.6}$$

(ii) 任给整数 $n \geqslant 47$, 有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} p_k < \frac{np_n}{2} - \frac{n^2}{6}. \tag{1.7}$$

第 2 与 3 节分别证明定理 1.1 与 1.2.

2 定理 1.1 的证明

引理 2.1 [2] 对于整数 $k \geqslant 2$, 有不等式

$$p_k \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 2.25}{\log k}\right). \tag{2.1}$$

对于整数 $k \geqslant 27{,}076$, 有不等式

$$p_k \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 1.8}{\log k}\right). \tag{2.2}$$

引理 2.2 设 m 和 n 为正整数且 $3 \leqslant m < \sqrt{n}$, 则有

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\log k} < \frac{n}{\log n} + \frac{4n}{\log^2 n} + \frac{\sqrt{n} - 2(m-1)}{\log^2 m}. \tag{2.3}$$

证明 利用 Abel 求和法与熟知的不等式 $\log(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}$ $(k=1,2,3,\ldots)$, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{\log k}&=\sum_{k=m}^{n}\frac{k-(k-1)}{\log k}\\&=\sum_{k=m}^{n-1}k\left(\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)}\right)+\frac{n}{\log n}-\frac{m-1}{\log m}\\&=\sum_{k=m}^{n-1}\frac{k\log(1+1/k)}{(\log k)\log(k+1)}+\frac{n}{\log n}-\frac{m-1}{\log m}\\&<\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{\log^2 k}+\frac{n}{\log n}-\frac{m-1}{\log m}.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{\log^2 k}&=\sum_{k=m}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{\log^2 k}+\sum_{k=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{n-1}\frac{1}{\log^2 k}\\&\leqslant\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-(m-1)}{\log^2 m}+\frac{n-1-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\log^2\sqrt{n}}\\&<\frac{\sqrt{n}-m+1}{\log^2 m}+\frac{4(n-\sqrt{n})}{\log^2 n},\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{\log k}<\frac{n}{\log n}-\frac{m-1}{\log m}+\frac{\sqrt{n}-m+1}{\log^2 m}+\frac{4n}{\log^2 n},$$

从而不等式 (2.3) 成立. □

定理 1.1 的证明 当 $125\leqslant n<50{,}000$ 时, 借助 Mathematica 编程验证可知 (1.3) 成立. 下面假设 $n\geqslant 50{,}000$.

令 $m=27{,}076$. 借助 Mathematica 编程计算知 $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{p_k}{k}<283{,}452.35$. 因此利用引理 2.1 中不等式 (2.2) 可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{k}-283{,}452.35<\sum_{k=m}^{n}\frac{p_k}{k}\leqslant\sum_{k=m}^{n}\left(\log k+\log\log k-1+\frac{\log\log k-1.8}{\log k}\right).\tag{2.4}$$

利用分部积分知

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1}(\log k+\log\log k)&\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}(\log x+\log\log x)dx=\int_m^n(\log x+\log\log x)dx\\&=x(\log x+\log\log x)|_{x=m}^{n}-\int_m^n x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x\log x}\right)dx\\&=n(\log n+\log\log n-1)-m(\log m+\log\log m-1)-\int_m^n\frac{dx}{\log x},\end{aligned}$$

而且

$$\int_m^n\frac{dx}{\log x}=\frac{x}{\log x}\bigg|_{x=m}^{n}-\int_m^n\left(-\frac{x}{x\log^2 x}\right)dx\geqslant\frac{n}{\log n}-\frac{m}{\log m}+\frac{n-m}{\log^2 n}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(\log k+\log\log k-1) \leqslant \log n &+ \log\log n-(n-m+1)\\ &+n(\log n+\log\log n-1)-m(\log m+\log\log m-1)\\ &-\frac{n}{\log n}+\frac{m}{\log m}-\frac{n-m}{\log^2 n}\end{aligned} \tag{2.5}$$

考虑到 $n \geqslant 27{,}076 > 164^2$, 依引理 2.2 知

$$\sum_{k=164}^{n}\frac{1}{\log k}<\frac{n}{\log n}+\frac{4n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}-2\times 163}{\log^2 164},$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{\log k} &= \sum_{k=164}^{n}\frac{1}{\log k}-\sum_{k=164}^{m-1}\frac{1}{\log k}\\ &<\frac{n}{\log n}+\frac{4n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}-326}{\log^2 164}-2{,}948.64\\ &<\frac{n}{\log n}+\frac{4n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}}{\log^2 164}-2{,}961.17.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{\log\log k-1.8}{\log k}\leqslant(\log\log n-1.8)\left(\frac{n}{\log n}+\frac{4n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}}{\log^2 164}-2{,}961.17\right). \tag{2.6}$$

综合 (2.4)–(2.6), 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{k}-283{,}452.35 < n(\log n &+ \log\log n-2)-m(\log m+\log\log m-2)\\ &+\log n+\log\log n-1-\frac{n}{\log n}-\frac{n}{\log^2 n}+\frac{2m}{\log m}\\ &+(\log\log n-1.8)\left(\frac{n}{\log n}+\frac{4n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}}{\log^2 164}-2{,}961.17\right).\end{aligned}$$

根据不等式 (2.1), 有 $p_n-n\geqslant n(\log n+\log\log n-2+\frac{\log\log n-2.25}{\log n})$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{k}-(p_n-n) &< 283{,}452.35-m(\log m+\log\log m-2)\\ &\quad+\log n+\log\log n-1-\frac{n}{\log n}-\frac{n}{\log^2 n}+\frac{2m}{\log m}\\ &\quad+(2.25-1.8)\frac{n}{\log n}+(\log\log n-1.8)\left(\frac{4n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}}{\log^2 164}-2{,}961.17\right)\\ &=-\frac{0.55n}{\log n}-\frac{8.2n}{\log^2 n}+\frac{4n\log\log n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}(\log\log n-1.8)}{\log^2 164}\\ &\quad+\log n-2{,}960.17\log\log n-m(\log m+\log\log m-2)+\frac{2m}{\log m}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+283{,}451.35+1.8\times 2{,}961.17\\
&<-\frac{0.55n}{\log n}-\frac{8.2n}{\log^2 n}+\frac{4n\log\log n}{\log^2 n}+\frac{\sqrt{n}\,\log\log n}{\log^2 164}\\
&+\log n-2{,}960.17\log\log n+8{,}992.62.
\end{aligned}
$$

考虑到 $n\geqslant 50{,}000$, 易见 $8{,}992.62-2{,}960.17\log\log n\leqslant 8{,}992.62-2{,}960.17\log\log 50{,}000<1{,}944$, 也容易证明

$$
\frac{n}{\log^2 n}(0.55\log n-4\log\log n+8.2)-\frac{\sqrt{n}\,\log\log n}{\log^2 164}-\log n>1{,}944.
$$

因此 $\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{k}-(p_n-n)<0$. 定理 1.1 证毕. □

3 定理 1.2 的证明

根据文献 [2], 对于任意整数 $n\geqslant 2$, 有不等式

$$
p_n\geqslant n(\log n+\log\log n-1). \tag{3.1}
$$

基于此, 下述引理可视为 Mandl 不等式 (1.1) 的加强式推广.

引理 3.1 设 α 为正实数, 则对整数 $n\geqslant 2$, 有

$$
\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha-1}p_k\leqslant\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log n+\log\log n-1)-\frac{n^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+\frac{n^{\alpha+1}\log\log n}{\log n}+O(n^{\alpha}\log n). \tag{3.2}
$$

更进一步地, 对于任意整数 $n\geqslant m=\lceil\max\{\mathrm{e}^{1/\alpha},27{,}076\}\rceil$, 有不等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n}k^{\alpha-1}p_k\leqslant&\left(\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}+n^{\alpha}\right)(\log n+\log\log n-1)-\frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log m+\log\log m-1)\\
&-\left(1+\frac{1}{\log n}\right)\frac{n^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+\frac{(n-m+1)n^{\alpha}}{\log n}(\log\log n-1.8).
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

证明 易见 $\log\log m\geqslant\log\log 27{,}076>2.323>1.8$. 由于

$$
\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\alpha}}{\log x}\right)=\frac{x^{\alpha-1}}{\log x}\left(\alpha-\frac{1}{\log x}\right)
$$

在 $x\geqslant m\geqslant e^{1/\alpha}$ 时非负, 所以函数 $f(x)=x^{\alpha}/(\log x)$ 在区间 $[m,+\infty)$ 上单调不减.

假设 n 是不小于 m 的整数. 根据不等式 (2.2), 有

$$
\sum_{k=m}^{n}k^{\alpha-1}p_k\leqslant\sum_{k=m}^{n}k^{\alpha}\left(\log k+\log\log k-1+\frac{\log\log k-1.8}{\log k}\right).
$$

易见

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m\leqslant k<n}k^{\alpha}\left(\log k+\log\log k-1+\frac{\log\log k-1.8}{\log k}\right)\\
&\leqslant\sum_{m\leqslant k<n}\int_{k}^{k+1}x^{\alpha}(\log x+\log\log x-1)dx+\sum_{m\leqslant k<n}\int_{k}^{k+1}\frac{x^{\alpha}}{\log x}(\log\log x-1.8)dx
\end{aligned}
$$

$$= \int_m^n x^\alpha(\log x + \log\log x - 1)dx + \int_m^n \frac{x^\alpha}{\log x}(\log\log x - 1.8)dx,$$

而且

$$\int_m^n \frac{x^\alpha}{\log x}(\log\log x - 1.8) \leqslant \int_m^n \frac{n^\alpha}{\log n}(\log\log n - 1.8)dx = \frac{(n-m)n^\alpha}{\log n}(\log\log n - 1.8).$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_m^n x^\alpha(\log x + \log\log x - 1)dx \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x + \log\log x - 1)\bigg|_{x=m}^n - \int_m^n \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x}\right)dx \\
&\leqslant \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x + \log\log x - 1)\bigg|_{x=m}^n - \int_m^n \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)dx \\
&= \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log n + \log\log n - 1) - \frac{m^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log m + \log\log m - 1) - \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)\frac{n^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}.
\end{aligned}$$

综上可得不等式 (3.3) 成立. 于是

$$\sum_{k=m}^n k^{\alpha-1}p_k \leqslant \left(\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + n^\alpha\right)(\log n + \log\log n - 1) - \frac{n^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + \frac{n^{\alpha+1}}{\log n}\log\log n,$$

从而 (3.2) 也成立.

至此, 引理 3.1 证毕. □

引理 3.2 对于整数 $n > 5{,}000^2$, 有不等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{k} > n(\log n + \log\log n - 2) + \frac{(n-4{,}999)\log\log n}{\log n} - \frac{3.9114n}{\log n} - 0.03102\sqrt{n} + 668.58. \tag{3.4}$$

证明 注意 $N = 4{,}999 > \mathrm{e}^\mathrm{e}$. 在区间 $[\mathrm{e}, +\infty)$ 上, 函数 $g(x) = (\log x)/x$ 单调不增, 这是因为

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{1-\log x}{x^2} \leqslant 0.$$

于是, 当 $N+1 \leqslant k \leqslant n$ 时,

$$\frac{\log\log k}{\log k} \geqslant \frac{\log\log n}{\log n}.$$

由于 $n > (N+1)^2 = 5{,}000^2$, 由引理 2.2 知

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+1}^n \frac{1}{\log k} &< \frac{n}{\log n} + \frac{4n}{\log^2 n} + \frac{\sqrt{n} - 2N}{\log^2(N+1)} \\
&< \left(1 + \frac{4}{\log 5{,}000^2}\right)\frac{n}{\log n} + \frac{\sqrt{n}}{\log^2 5{,}000} - \frac{2\times 4{,}999}{\log^2 5{,}000} \\
&< 1.23482\frac{n}{\log n} + \frac{\sqrt{n}}{\log^2 5{,}000} - 137.8225.
\end{aligned}$$

再结合不等式 (2.1), 得到

$$\sum_{N<k\leqslant n} \frac{p_k}{k} \geqslant \sum_{k=N+1}^n \left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 2.25}{\log k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{k=N+1}^{n}\int_{k-1}^{k}(\log x+\log\log x-1)dx+\sum_{k=N+1}^{n}\frac{\log\log n}{\log n}-2.25\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{\log k}\\
&>\int_{N}^{n}(\log x+\log\log x-1)dx+(n-N)\frac{\log\log n}{\log n}\\
&\quad -2.25\bigg(1.23482\frac{n}{\log n}+\frac{\sqrt{n}}{\log^2 5{,}000}-137.8225\bigg).
\end{aligned}
$$

利用分部积分, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{N}^{n}(\log x+\log\log x-1)dx\\
&=x(\log x+\log\log x-1)\,|_{x=N}^{n}-\int_{N}^{n}x\bigg(\frac{1}{x}+\frac{1}{x\log x}\bigg)dx\\
&=n(\log n+\log\log n-1)-N(\log N+\log\log N-1)-(n-N)-\int_{N}^{n}\frac{dx}{\log x},
\end{aligned}
$$

而且

$$
\int_{N}^{n}\frac{dx}{\log x}=\frac{x}{\log x}\bigg|_{x=N}^{n}+\int_{N}^{n}\frac{dx}{\log^2 x}\leqslant\frac{n}{\log n}-\frac{N}{\log N}+\frac{1}{\log N}\int_{N}^{n}\frac{dx}{\log x}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\int_{N}^{n}(\log x+\log\log x-1)dx\\
&\geqslant n(\log n+\log\log n-2)-N(\log N+\log\log N-2)-\frac{n/\log n-N/\log N}{1-1/\log N}\\
&\geqslant n(\log n+\log\log n-2)-N(\log N+\log\log N-2)-1.133032\bigg(\frac{n}{\log n}-\frac{N}{\log N}\bigg)\\
&\geqslant n(\log n+\log\log n-2)-\frac{1.133032n}{\log n}-42{,}621.6.
\end{aligned}
$$

综合以上两段结果并注意到 $\sum_{k=1}^{4{,}999}p_k/k>42{,}980.08$, 便得到不等式 (3.4). □

定理 1.2 的证明　令 $m=27{,}076$. 任给整数 $n>5{,}000^2$, 在 (3.3) 中令 $\alpha=1$, 可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}p_k&\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}p_k+\frac{n(n+2)}{2}(\log n+\log\log n-1)-\frac{n^2}{4}\\
&\quad-\frac{m^2}{2}\bigg(\log m+\log\log m-\frac{3}{2}\bigg)+\frac{n(n-m+1)}{\log n}(\log\log n-1.8)-\frac{n^2-m^2}{4\log n}\\
&\leqslant\frac{n(n+2)}{2}(\log n+\log\log n-1)-\frac{n^2}{4}+\frac{n(n-m+1)}{\log n}(\log\log n-1.8)\\
&\quad-\frac{n^2-m^2}{4\log n}-2{,}775{,}092.35.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k&\leqslant(n+2)(\log n+\log\log n-1)-\frac{n}{2}+\frac{2(n-m+1)}{\log n}\log\log n\\
&\quad-\frac{(2\times1.8+0.5)n}{\log n}+\frac{3.6(m-1)}{\log 5{,}000^2}+\frac{m^2}{2\times5{,}000^2\log 5{,}000^2}-2{,}775{,}092.35\times\frac{2}{n},
\end{aligned}
$$

从而

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k \leqslant (n+2)(\log n+\log\log n-1)-\frac{n}{2}+\frac{2(n-m+1)}{\log n}\log\log n-\frac{4.1n}{\log n}+5{,}722.8162. \tag{3.5}$$

根据 (3.4) 和 (3.5), 对 $\delta>0.5$, 要得到不等式 (1.4), 只需要说明

$$\begin{aligned}\left(\delta+\frac{1}{2}-1\right)n > {} & 2(\log n+\log\log n-1)+\frac{2(n-m+1)}{\log n}\log\log n+5{,}722.8162\\ & -(n-4{,}999)\frac{\log\log n}{\log n}+(3.9114-4.1)\frac{n}{\log n}+0.03102\sqrt{n}-668.58,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}(\delta-0.5)n > {} & (n-2m+5{,}001)\frac{\log\log n}{\log n}-\frac{0.1886n}{\log n}+0.03102\sqrt{n}\\ & +2(\log n+\log\log n)+5{,}052.2362. \end{aligned}\tag{3.6}$$

这个不等式右边主项是 $n(\log\log n)/\log n$, 它在 n 充分大时成立.

不难证明不等式 (3.6) 在 $\delta=0.6553$ 且 $n>5{,}000^2=2.5\times10^7$ 时的确成立. 对于 $n=3,4,\ldots,2.5\times10^7$, 可用 Mathemtica 直接验证不等式 (1.5). 定理 1.2 证毕. □

致谢 作者衷心感谢审稿人所提的有益修改建议.

参考文献

1 Dusart P. Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers. PhD Thesis. Limoges: Université de Limoges, 1998

2 Dusart P. The kth prime is greater than $k(\log k+\log\log k-1)$ for $k\geqslant 2$. Math Comp, 1999, 68: 411–415

3 Hassani M. A remark on the Mandl's inequality. Octogon Math Magazine, 2007, 15: 567–572

4 Rosser J B, Schoenfeld L. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. Math Comp, 1975, 29: 243–269

5 Sun Z W. On a sequence involving sums of primes. Bull Aust Math Soc, 2013, 88: 197–205

6 Sun Z W. Conjectures involving arithmetical sequences. In: Number Theory: Arithmetic in Shangri-La. Proceedings of the 6th China-Japan Seminar. Singapore: World Sci, 2013, 244–258

A new inequality for primes

Zhi-Wei Sun

Abstract For $n=1,2,3,\ldots$, let p_n denote the n-th prime. For any integer $n\geqslant 125$, we establish the new inequality $p_n>n+\sum_{k=1}^{n}p_k/k$, and prove that this is stronger than Mandl's inequality $\sum_{k=1}^{n}p_k<np_n/2$.

Keywords prime, the n-th prime, inequality

MSC(2020) 11A41

doi: 10.1360/SSM-2023-0328