南京大学学报 (自然科学版), 37(2001), 第 4 期, 486–492.

关于 n 维覆盖系

胡忠　孙智伟

(南京大学数学系，南京 210093)

摘要

整数环 $\mathbb{Z}$ 的同余覆盖系已经被研究多年. 在本文中我们研究 $\mathbb{Z}^n$ 的覆盖 $\mathcal{A}=\{\vec{a}_s(\vec{m}_s)\}_{s=1}^k$, 其中

$$\vec{a}_s(\vec{m}_s)=\{\vec{x}=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle : x_t\equiv a_{st}(\mathrm{mod}\ m_{st})\ (t=1,\cdots,n)\}.$$

我们推广了关于 $\mathbb{Z}$ 的同余覆盖的一些经典结果，特别地证明了下述结果：设每个 $\vec{x}\in\mathbb{Z}^n$ 被 $\mathcal{A}$ 覆盖恰好 m 次且诸模 $\vec{m}_s$ 不全相同，如果 $\vec{m}_r$ 是除性极大模 (即 $\vec{m}_r\mid\vec{m}_s\Longrightarrow\vec{m}_r=\vec{m}_s$), 那么模 $\vec{m}_r$ 在 $\vec{m}_1,\cdots,\vec{m}_k$ 中至少重复出现 p 次，这儿 p 是 $m_{r1}\cdots m_{rn}$ 的最小素因子。

关键词 : $\mathbb{Z}^n$ 的覆盖，剩余类，单位根。

0. 引言

以 $\mathbb{Z}_+$ 表示正整数集，对 $a\in\mathbb{Z}$ 及 $m\in\mathbb{Z}_+$ 让

$$a(m)=a+m\mathbb{Z}=\{x\in\mathbb{Z}: x\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)\}.$$

对有限个这种剩余类构成的系

$$A=\{a_s(m_s)\}_{s=1}^k, \tag{0.1}$$

其覆盖函数 $w_A:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 如下定义：

$$w_A(x)=|\{1\leqslant s\leqslant k: x\equiv a_s\ (\mathrm{mod}\ m_s)\}|.$$

如果对所有 $x\in\mathbb{Z}$ 均有 $w_A(x)\geqslant 1$, 则称 (0.1) 为 $\mathbb{Z}$ 的一个 (同余) 覆盖；如果对一切 $x\in\mathbb{Z}$ 均有 $w_A(x)=1$, 则说 (0.1) 为 $\mathbb{Z}$ 的一个不相交覆盖.

$\mathbb{Z}$ 的同余覆盖概念是由著名数学家 P. Erdös 在 [1] 中引进的，此后这一领域受到广泛重视并已发现许多重要的应用，参看 Guy [2], Porubský [3] 及孙智伟 [4][5].

覆盖理论中著名的 Newman—Znám 结果如下：

设 (0.1) 是一个不相交覆盖系，且

$$1<m_1\leqslant\cdots\leqslant m_{k-l}<m_{k-l+1}=\cdots=m_k,$$

则 l 不小于最大模 m_k 的最小素因子 $p(m_k)$.

这一结果首先由 Š. Znám [6] 在 1968 猜出，然后由 M. Newman [7] 在 1971 年利用单位根知识证出. 强一点的形式 $l>1$ 是由 H. Davenport, L. Mirsky, D. Newman, 和 R. Rodó 同时独立证明的，更强的形式 $l\geqslant\min\limits_{1\leqslant s\leqslant k-l}\frac{m_k}{(m_s,m_k)}$ 是由孙智伟 [8] 在 1991 年获得的， Chen and Porubský [9] 进一步证明了 l 可表示成 $\sum_{s=1}^{k-l}\frac{m_k}{(m_s,m_k)}x_s$ 的形式，这儿诸 x_s 为非负整数.

在 1985 年第二作者提出了高维覆盖系的概念。本文将研究其基本性质并推广关于同余覆盖系的 Newman—Znám 结果.

本文受到国家自然科学基金 (19971038) 及教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励基金的资助。

定义 0.1. 对 $\mathbb{Z}^n$ 中的矢量 $\vec{a}=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 与 $\vec{m}=\langle m_1,\cdots,m_n\rangle\in\mathbb{Z}_+^n$, 我们让
$\vec{a}(\vec{m})=\{\vec{x}=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\in\mathbb{Z}^n:\vec{x}\equiv\vec{a}\ (\mathrm{mod}\ \vec{m})$ 即 $x_t\in a_t(m_t)\ (1\leqslant t\leqslant n)\}$,
并称之为 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个模为 $\vec{m}$ 的剩余类.

现在我们介绍一下本文中一些常用记号。对 $a,b\in\mathbb{Z}$ 我们以 (a,b) 表示 a 与 b 的最大公因数。对有穷正整数列 $\{m_i\}_{i\in I}$ 我们用 $[m_i]_{i\in I}$ 表示诸 m_i $(i\in I)$ 的最小公倍数， $[m_i]_{i\in\emptyset}$ 视为 1. 对 $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{Z}^n$, 我们让 $\vec{x}\vec{y}=\langle x_1y_1,\cdots,x_ny_n\rangle$, $\vec{x}$ 整除 $\vec{y}$ (记为 $\vec{x}\mid\vec{y}$) 指有 $\vec{z}\in\mathbb{Z}^n$ 使 $\vec{x}\vec{z}=\vec{y}$.

对有限个剩余类构成的系

$$\mathcal{A}=\{\vec{a}_s(\vec{m}_s)\}_{s=1}^k, \tag{0.2}$$

其覆盖函数 $w_{\mathcal{A}}:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{N}$ 如下给出：

$$w_{\mathcal{A}}(\vec{x})=|\{1\leqslant s\leqslant k:\vec{x}\equiv\vec{a}_s\ (\mathrm{mod}\ \vec{m}_s)\}|. \tag{0.3}$$

如果对任何 $\vec{x}\in\vec{\mathbb{Z}}$ 均有 $w_{\mathcal{A}}(\vec{x})\geqslant m$, 则称 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个 (至少)m 重覆盖， 1 重覆盖简称为覆盖. 如果对任何 $\vec{x}\in\mathbb{Z}^n$ 均有 $w_{\mathcal{A}}(\vec{x})=m$, 则说 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个恰好 m 重覆盖，恰好 1 重覆盖也叫不相交覆盖.

对 $\mathbb{Z}^n$ 的覆盖，本文证明的主要结论有：

(a) 若 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的 m 重覆盖，则 $\sum_{s=1}^k\frac{1}{m_{s1}\cdots m_{sn}}\geqslant m$.

(b) 如果 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的恰好 m 重覆盖，则对 $\vec{d}\in\mathbb{Z}_+^n$ 及 $\vec{c}\in\mathbb{Z}^n$ 有

$$\sum_{\substack{s=1\\ \vec{d}\mid\vec{c}\vec{m}_s}}^k\frac{e^{2\pi i\sum_{t=1}^n a_{st}c_t/d_t}}{m_{s1}\cdots m_{sn}}=\begin{cases}m & \vec{d}\mid\vec{c}\text{时},\\ 0 & \text{此外}.\end{cases}$$

(c) 设 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的恰好 m 重覆盖且其模不全相同， $\vec{m}_r$ 为除性极大模 (即 $\vec{m}_s\neq\vec{m}_r$ 时 $\vec{m}_r\nmid\vec{m}_s$) ，则有不等式

$$|\{1\leqslant s\leqslant k:\vec{m}_s=\vec{m}_r\}|\geqslant p(m_{r1}\cdots m_{rn}).$$

这是 Znám—Newman 结果的推广.

1. 关于 $\mathbb{Z}^n$ 覆盖的一些基本结果

(0.2) 的覆盖函数 $w_{\mathcal{A}}$ 是周期函数. 事实上, 对 $t=1,\cdots,n$ 让 N_t 是诸 m_{st} $(1\leqslant s\leqslant k)$ 的最小公倍数 $[m_{1t},\cdots,m_{kt}]$, 则对 $\vec{N}=\langle N_1,\cdots,N_n\rangle$ 及 $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{Z}^n$ 有

$$\vec{x}\equiv\vec{y}\ (\mathrm{mod}\ \vec{N})\Rightarrow w_{\mathcal{A}}(\vec{x})=w_{\mathcal{A}}(\vec{y}).$$

关于覆盖函数在一个周期内的算术平均，我们有

定理 1.1. 对 $\mathbb{Z}^n$ 的剩余类系 (0.2) 让 $N_t=[m_{1t},\cdots,m_{kt}]$ $(t=1,\cdots,n)$. 则

$$\frac{1}{N_1\cdots N_n}\sum_{\substack{0\leqslant x_1<N_1\\ \cdots\\ 0\leqslant x_n<N_n}}w_{\mathcal{A}}(\vec{x})=\sum_{s=1}^k\frac{1}{m_{s1}\cdots m_{sn}}. \tag{1.1}$$

证明：对 $1 \leqslant s \leqslant k$ 及 $1 \leqslant t \leqslant n$ 定义 $\chi_{st}:\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ 如下：

$$\chi_{st}(x)=\begin{cases}1 & x\equiv a_{st}\ (\mathrm{mod}\ m_{st})\text{时},\\ 0 & \text{此外}.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N_1\cdots N_n}\sum_{\substack{0\leqslant x_1<N_1\\ \cdots\\ 0\leqslant x_n<N_n}} w_{\mathcal{A}}(\vec{x})\\ =&\frac{1}{N_1\cdots N_n}\sum_{0\leqslant x_1<N_1}\cdots\sum_{0\leqslant x_n<N_n}\sum_{s=1}^{k}\chi_{s1}(x_1)\cdots\chi_{sn}(x_n)\\ =&\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{1}{N_1}\sum_{x_1=0}^{N_1-1}\chi_{s1}(x_1)\right)\cdots\left(\frac{1}{N_n}\sum_{x_n=0}^{N_n-1}\chi_{sn}(x_n)\right)\\ =&\sum_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{N_t}\cdot\frac{N_t}{m_{st}}\right)=\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{m_{s1}\cdots m_{sn}}.\end{aligned}$$

证毕.

推论 1.1. 设 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的 m 重覆盖，则

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{m_{s1}\cdots m_{sn}}\geqslant m, \tag{1.2}$$

而且等号成立当且仅当 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的恰 m 重覆盖.

证明：对 $t=1,\cdots,n$ 让 $N_t=[m_{1t},\cdots,m_{kt}]$, 则 (1.1) 的左边至少是

$$\frac{1}{N_1\cdots N_n}\sum_{\substack{0\leqslant x_1<N_1\\ \cdots\\ 0\leqslant x_n<N_n}} m=m,$$

当且仅当 (1.1) 是 $\mathbb{Z}$ 的恰 m 重覆盖时它可达到下界 m. 根据定理 1.1 便的所要结论.

注 1.1. 在 $n=1$ 时定理 1.1 及推论 1.1 是已知的.

使用对角线方法，我们可证

定理 1.2. 设 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的一个 m 重覆盖且 $k\leqslant n$. 则对 $1,\cdots,n$ 的任一个 k 元（不重复）排列 $t_1,\cdots,t_k$ 均有

$$|\{1\leqslant s\leqslant k:\ m_{st_s}=1\}|\geqslant m, \tag{1.3}$$

特别地

$$|\{1\leqslant s\leqslant k: m_{s,s+i}=1\}|\geqslant m\quad(0\leqslant i\leqslant n-k) \tag{1.4}$$

而且

$$|\{1 \leqslant s \leqslant k : m_{s,j-s} = 1\}| \geqslant m \quad (k < j \leqslant n). \tag{1.5}$$

证明：取 $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n$ 使得 $1 \leqslant s \leqslant k$ 时 $x_{t_s} = a_{st_s} + 1$. 让

$$I = \{1 \leqslant s \leqslant k : \vec{x} \equiv \vec{a_s} \pmod{\vec{m_s}}\},$$

则 $|I| \geqslant m$. 对 $s \in I$, 显然有

$$a_{st_s} + 1 = x_{t_s} \equiv a_{st_s} \pmod{m_{st_s}},$$

从而 $m_{st_s} = 1$. 这便证明了 (1.3).

在 (1.3) 中取 $t_s = s + i$ $(0 \leqslant i \leqslant n - k)$ 便得 (1.4). (1.5) 可通过在 (1.3) 中取 $t_s = j - s$ $(k < j \leqslant n)$ 得到。证毕。

注 1.2. (1.4) 蕴涵着模的对角线分量 $m_{11}, m_{22}, \cdots, m_{kk}$ 中至少有 m 个是 1.

定义 1.1. 如果 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的 m 重覆盖，但 (0.2) 的任一个真子系不再是 $\mathbb{Z}^n$ 的 m 重覆盖，则说 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个极小 m 重覆盖.

定理 1.3. 设 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个极小 m 重覆盖. 对 $\{1, \cdots, k\}$ 的任一个非空子集 I, 我们有

$$|I| \geqslant \min_{i \in I} \prod_{t=1}^{n} \frac{m_{it}}{m_{it}^*}, \tag{1.6}$$

这儿 $m_{it}^* = (m_{it}, [m_{st}]_{s \in \bar{I}})$ $(t = 1, \cdots, n)$, 其中 $\bar{I} = \{1, \cdots, k\} \setminus I$.

证明：由于 $\mathcal{A}_I = \{\vec{a_s}(\vec{m_s})\}_{s \in \bar{I}}$ 不是 m 重覆盖，必有 $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$l = |\{s \in \bar{I} :\ \vec{x} \equiv \vec{a_s} \pmod{\vec{m_s}}\}| < m.$$

记 $J = \{i \in I : 对1 \leqslant t \leqslant n总有m_{it}^* \mid a_{it} - x_t\}$. 对 $j \in J$ 及 $t = 1, \cdots, n$ 显然存在 $b_{jt} \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{[m_{st}]_{s \in \bar{I}}}{m_{jt}^*} b_{jt} \equiv \frac{a_{jt} - x_t}{m_{jt}^*} \left(\mathrm{mod}\ \frac{m_{jt}}{m_{jt}^*}\right).$$

任给 $\vec{y} \in \mathbb{Z}^n$, 显然矢量

$$\langle x_1 + [m_{s1}]_{s \in \bar{I}} y_1, \cdots, x_n + [m_{sn}]_{s \in \bar{I}} y_n \rangle$$

同 $\vec{x}$ 一样也被 $\mathcal{A}_I$ 覆盖恰好 l 次. 因 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的 m 覆盖必有 $i \in I$ 使得

$$x_t + [m_{st}]_{s \in \bar{I}} y_t \equiv a_{it} \pmod{m_{it}} \ (t = 1, \cdots, n).$$

注意 $i \in J = \{j \in I : m_{jt}^* | a_{jt} - x_t\}$, 而且

$$\frac{[m_{st}]_{s \in \bar{I}}}{m_{it}^*} y_t \equiv \frac{a_{it} - x_t}{m_{it}^*} \left(\mathrm{mod}\ \frac{m_{it}}{m_{it}^*}\right),$$

从而 $y_t \equiv b_{it} \pmod{m_{it}/m_{it}^*}$ $(t=1,\cdots,n)$. 由上可见

$$\left\{\langle b_{j1},\cdots,b_{jn}\rangle\left(\left\langle\frac{m_{j1}}{m_{j1}^*},\cdots,\frac{m_{jn}}{m_{jn}^*}\right\rangle\right)\right\}_{j\in J}$$

构成 $\mathbb{Z}^n$ 的一个覆盖. 应用推论 1.1 便得

$$\sum_{j\in J}\left(\prod_{t=1}^{n}\frac{m_{jt}}{m_{jt}^*}\right)^{-1}\geqslant 1,$$

故

$$\sum_{i\in I}\prod_{t=1}^{n}\frac{m_{it}^*}{m_{it}}\geqslant 1=\sum_{i\in I}\frac{1}{|I|}.$$

于是必有 $i\in I$ 使得

$$\prod_{t=1}^{n}\frac{m_{it}}{m_{it}^*}\leqslant |I|.$$

证毕.

注 1.3. 在定理 1.3 中取 $n=1$ 便得 [4] 中推论 3.

2. 主要结果

引理 2.1. 设 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的恰好 m 重覆盖, 且对 $s=1,\cdots,k$ 及 $t=1,\cdots,n$ 有 $0\leqslant a_{st}<m_{st}$. 则对模小于 1 的复数 $z_1,\cdots,z_n$ 恒有

$$\sum_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{n}\frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}}=\frac{m}{\prod_{t=1}^{n}(1-z_t)}. \tag{2.1}$$

证明: 对 $1\leqslant s\leqslant k$ 显然有

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{n}\frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}}&=\prod_{t=1}^{n}(z_t^{a_{st}}+z_t^{a_{st}+m_{st}}+\cdots)\\&=\prod_{t=1}^{n}\sum_{\substack{x_t=0\\x_t\equiv a_{st}\ (\mathrm{mod}\ m_{st})}}^{\infty}z_t^{x_t}=\sum_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{N}^n\\\vec{x}\equiv\vec{a}_s\ (\mathrm{mod}\ \vec{m}_s)}}z_1^{x_1}\cdots z_n^{x_n}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{n}\frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}}&=\sum_{s=1}^{k}\sum_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{N}^n\\\vec{x}\equiv\vec{a}_s\ (\mathrm{mod}\ \vec{m}_s)}}z_1^{x_1}\cdots z_n^{x_n}\\&=\sum_{\vec{x}\in\mathbb{N}^n}\sum_{\substack{s=1\\\vec{x}\equiv\vec{a_s}\ (\mathrm{mod}\ \vec{m_s})}}^{k}z_1^{x_1}\cdots z_n^{x_n}=\sum_{\vec{x}\in\mathbb{N}^n}mz_1^{x_1}\cdots z_n^{x_n}\\&=m\left(\sum_{x_1=0}^{\infty}z_1^{x_1}\right)\cdots\left(\sum_{x_n=0}^{\infty}z_n^{x_n}\right)=m\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{1-z_t}.\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.1. 设 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的恰好 m 重覆盖，设 $\vec{c}\in\mathbb{Z}^n, \vec{d}\in\mathbb{Z}_+^n$ 且 $\vec{d}\nmid\vec{c}$. 则

$$\sum_{\substack{s=1\\ \vec{d}\mid\vec{c}\vec{m}_s}}^{k} \frac{e^{2\pi i\sum_{t=1}^n a_{st}c_t/d_t}}{m_{s1}\cdots m_{sn}} = 0. \tag{2.2}$$

证明：不妨设 $I = \{1 \leqslant t \leqslant n : d_t \nmid c_t\} = \{h, \cdots, n\}$. 由引理 2.1 知 $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$ 时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-z_n^{d_n}} \sum_{\substack{s=1\\ d_n\mid c_n m_{sn}}}^{k} \frac{z_n^{a_{sn}}}{(1-z_n^{m_{sn}})/(1-z_n^{d_n})} \prod_{0<t<n} \frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}}\\ &= \frac{m}{(1-z_1)\cdots(1-z_n)} - \sum_{\substack{s=1\\ d_n\nmid c_n m_{sn}}}^{k} \prod_{t=1}^{n} \frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}}.\end{aligned}$$

让 $z_n \to e^{2\pi i c_n/d_n}$, 则上式右边有有穷极限，而且 $\frac{1}{1-z_n^{d_n}} \to \infty$. 注意

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{z_n\to e^{2\pi i c_n/d_n}\\ |z_n|<1}} \sum_{\substack{s=1\\ d_n\mid c_n m_{sn}}}^{k} \frac{z_n^{a_{sn}}}{(1-z_n^{m_{sn}})/(1-z_n^{d_n})} \prod_{0<t<n} \frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}}\\ &= \sum_{\substack{s=1\\ d_n\mid c_n m_{sn}}}^{k} \frac{z_1^{a_{s1}}}{1-z_1^{m_{s1}}} \times\cdots\times \frac{z_{n-1}^{a_{s(n-1)}}}{1-z_{n-1}^{m_{s(n-1)}}} \times \frac{e^{2\pi i a_{sn}c_n/d_n}}{m_{sn}/d_n}.\end{aligned}$$

因此必有

$$\sum_{\substack{s=1\\ d_n\mid c_n m_{sn}}}^{k} \frac{z_1^{a_{s1}}}{1-z_1^{m_{s1}}} \times\cdots\times \frac{z_{n-1}^{a_{s(n-1)}}}{1-z_{n-1}^{m_{s(n-1)}}} \times \frac{e^{2\pi i a_{sn}c_n/d_n}}{m_{sn}} = 0.$$

如果 $n-1\in I$, 仿上法在上式中让 $z_{n-1} \to e^{2\pi i c_{n-1}/d_{n-1}}$ 可得

$$\sum_{\substack{1\leqslant s\leqslant k\\ d_n\mid c_n m_{sn}\\ d_{n-1}\mid c_{n-1}m_{s(n-1)}}} \prod_{0<t<n-1} \frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}} \times \frac{e^{2\pi i a_{s(n-1)}c_{n-1}/d_{n-1}}}{m_{s(n-1)}} \times \frac{e^{2\pi i a_{sn}c_n/d_n}}{m_{sn}} = 0.$$

再如此做下去，最后可得

$$\sum_{\substack{s=1\\ \vec{d}\mid\vec{c}\vec{m}_s}}^{k} \prod_{0<t<h} \frac{z_t^{a_{st}}}{1-z_t^{m_{st}}} \times \prod_{h\leqslant t\leqslant n} \frac{e^{2\pi i a_{st}c_t/d_t}}{m_{st}} = 0.$$

两边乘上 $\prod_{0<t<h}(1-z_t)$, 再让 $z_1, \cdots, z_{h-1} \to 1$ 即得 (2.2). 证毕。

注 2.1. 在 $n=1$ 时定理 2.1 由孙智伟在 [8] 中用稍复杂的分析方法获得. $n=1$ 且 $\vec{d}$ 是 $\mathcal{A}$ 的模时, 这首先由 B. Novák 和 Š.Znám [10] 在 1974 年用留数方法证得. 相比之下, 这儿对定理 2.1 的证明要简单得多.

定理 2.1 还可再一般化.

引理 2.2. 设 $c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{N}$, 且 $d_1,\cdots,d_l\in\mathbb{Z}_+$ 时, 如果有非零数 $x_1,\cdots,x_k$ 使对不被 $d_1,\cdots,d_l$ 中任一个整除的 $h\in\mathbb{Z}_+$ 总有 $\sum_{s=1}^k c_s x_s^h=0$, 则有

$$c_1+\cdots+c_k\in\{d_1x_1+\cdots+d_lx_l : x_1,\cdots,x_l\in\mathbb{N}\}. \tag{2.3}$$

这是孙智伟文 [4] 中引理 9, 它隐含于文 [9], 基本上应归功于 *Chen and Porubský [9].*

定理 2.2. 设 (0.2) 是 $\mathbb{Z}^n$ 的恰好 m 重覆盖, $\vec{d}\in\mathbb{Z}_+^n$ 且 $I(\vec{d})=\{1\leqslant s\leqslant k:\vec{d}\mid\vec{m}_s\}$ 是 $\{1,\cdots,k\}$ 的非空真子集. 令 $N(\vec{d})=[m_{s1}\cdots m_{sn}]_{s\in I(\vec{d})}$, 则 $\sum\limits_{s\in I(\vec{d})}\frac{N(\vec{d})}{m_{s1}\cdots m_{sn}}$ 可表示成 $\sum\limits_{s\notin I(\vec{d})}[\frac{d_t}{(d_t,m_{st})}]_{1\leqslant t\leqslant n}x_s$, 这儿诸 x_s 属于 $\mathbb{N}$.

证明: 任给整数 c, 假如对任何 $s\notin I(\vec{d})$ 均有 $[\frac{d_t}{(d_t,m_{st})}]_{1\leqslant t\leqslant n}\nmid c$, 则 $s\notin I(\vec{d})$ 时 $\vec{d}$ 不整除 $c\vec{m}_s=\langle cm_1,\cdots,cm_n\rangle$, 于是 $\vec{d}\mid c\vec{m}_s\iff\vec{d}\mid\vec{m}_s$, 因而由定理 2.1 可得

$$\sum_{\substack{s=1\\ \vec{d}\mid\vec{m}_s}}^{k}\frac{e^{2\pi ic\sum_{t=1}^n a_{st}/d_t}}{m_{s1}\cdots m_{sn}}=0,$$

即

$$\sum_{s\in I(\vec{d})}\frac{N(\vec{d})}{m_{s1}\cdots m_{sn}}e^{2\pi ic\sum_{t=1}^n a_{st}/d_t}=0.$$

利用引理 2.2 便得所要结果.

注 2.2. 定理 2.2 是 [9] 中主要结果到 n 维覆盖上的推广.

推论 2.1. 设 (0.2) 为 $\mathbb{Z}^n$ 的恰好 m 重覆盖, 且其模不全相同. 假如模 $\vec{m}_r$ 是除性极大模 (即 $1\leqslant s\leqslant k$ 时 $\vec{m}_r\mid\vec{m}_s\Longrightarrow\vec{m}_s=\vec{m}_r$), 则必有 $x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{N}$ 使得

$$|\{1\leqslant s\leqslant k:\vec{m}_s=\vec{m}_r\}|=\sum_{\substack{s=1\\ \vec{m}_s\neq\vec{m}_r}}^{k}\left[\frac{m_{rt}}{(m_{rt},m_{st})}\right]_{1\leqslant t\leqslant n}x_s, \tag{2.4}$$

从而

$$|\{1\leqslant s\leqslant k:\vec{m}_s=\vec{m}_r\}|\geqslant\min_{\substack{1\leqslant s\leqslant k\\ \vec{m}_s\neq\vec{m}_r}}\left[\frac{m_{rt}}{(m_{rt},m_{st})}\right]_{1\leqslant t\leqslant n}\geqslant p(m_{r1}\cdots m_{rn}). \tag{2.5}$$

证明：让 $\vec{d}=\vec{m}_r$, 则 $\emptyset \neq I(\vec{d}) \subset \{1,\cdots,k\}$. 当 $1 \leqslant s \leqslant k$ 时

$$s \in I(\vec{d}) \Longleftrightarrow \vec{d} \mid \vec{m}_s \Longleftrightarrow \vec{m}_s = \vec{d} = \vec{m}_r.$$

如果 $s \in I(\vec{d})$, 则 $m_{s1}\cdots m_{sn} = m_{r1}\cdots m_{rn}$. 应用定理 2.2 即知有 $x_1,\cdots,x_k \in \mathbb{N}$ 适合 (2.4)

当 $\vec{m}_s \neq \vec{m}_r$ 时，有 $1 \leqslant t \leqslant n$ 使 $m_{rt} \nmid m_{st}$, 从而

$$\frac{m_{rt}}{(m_{rt},m_{st})} \geqslant p(m_{rt}) \geqslant p(m_{r1}\cdots m_{rn})$$

因此 (2.5) 也成立. 证完.

注 2.3. 在 $n=1$ 时推论 2.1 是已知的，例如 (2.5) 中前一个不等式已由孙智伟在 [8] 中给出.

根据推论 2.1, 如果 (0.2) 中的模各不相同且 $k>1$, 则 (0.2) 不可能是 $\mathbb{Z}^n$ 的恰好 m 重覆盖. 在 $m=n=1$ 时这曾由 Erdös 猜出，现在我们成功地将这一结果推广到高维情形，孙智伟 [11] 中包含了另外一种推广。

参考文献

1. Erdös P., *On integers of the form* 2^k+p *and some related problems*[J], Summa Brasil. Math., 1950, 2: 113–123.
2. Guy R. K., *Unsolved Problems in Number Theory* [M], 2, New York, Springer-Verlag, 1994.
3. Porubský Š., *Results and Problems on Covering Systems of Residue Classes*[M] Mitt. Math. Sem. Giessen, Giessen Univ., 1981: 1–85.
4. Sun Z. W., *Covering the integers by arithmetic sequences*[J],Trans. Amer. Math. Soc., 1996, 348: 109–129.
5. Sun Z. W., *On integers not of the form* $\pm p^a \pm q^b$[J], Proc. Amer. Math. Soc., 2000, 128: 997-1002.
6. Znám Š., *On exactly covering systems of arithmetic sequences*[M], North-Holland, Colloq. János Bolyai Math. Soc., 1970: 221–225.
7. Newman M., *Roots of unity and covering sets*[J], Math. Ann., 1971, 191: 279–282.
8. 孙智伟, Znám-Newman结果的改进 [J], 数学季刊, 1991, 6(3): 90–96.
9. Chen Y. G. and Porubský Š., *Remarks on systems of congruence classes*[J], Acta Arith., 1995, 71: 1–10.
10. Novák B. and Znám Š., *Disjoint covering systems*[J], Amer. Math. Monthly, 1974, 81: 42-45.
11. Sun Z. W., *On a generalization of a conjecture of Erdös*, 南京大学学报 (自然科学版), 1991, 27(1): 8–15.

On n-Dimensional Covering Systems

Hu Zhong and Sun Zhiwei

(Dept. of Math., Nanjing University
Nanjing 210093, P. R. China)

Abstract

Covers of $\mathbb{Z}$ by finitely many residue classes have been investigated for many years. The Newman-Znám result asserts that if $\{a_s(\mathrm{mod}\ n_s)\}_{s=1}^k$ forms a disjoint cover of $\mathbb{Z}$ with $1 < n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{k-1} \leqslant n_k$ then $n_{k-p+1} = \cdots = n_{k-1} = n_k$ where p is the least prime dividing n_k. In this paper we study covers of $\mathbb{Z}^n$ in the form $\mathcal{A} = \{\vec{a}_s(\vec{m}_s)\}_{s=1}^k$ where $\vec{a}_s(\vec{m}_s) = \{\vec{x} = \langle x_1, \cdots, x_n\rangle : x_t \equiv a_{st}(\mathrm{mod}\ m_{st})$ for $t = 1, \cdots, n\}$. Some classical results on covers of $\mathbb{Z}$ are generalized. In particular, we show that if each $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n$ is covered by $\mathcal{A}$ exactly m times and the moduli $\vec{m}_s$ are not all equal, then any maximal modulus $\vec{m}_r$ with respect to divisiblity ($\vec{m}_r \mid \vec{m}_s \Longrightarrow \vec{m}_s = \vec{m}_r$) occurs at least p times among $\vec{m}_1, \cdots, \vec{m}_k$ where p is the smallest prime divisor of $m_{r1} \cdots m_{rn}$.

Keywords: cover of $\mathbb{Z}^n$, residue class, root of unity.