A talk given for Anhui Univ. (April 7, 2022)
and Jiangsu Normal Univ. (Aprile 10, 2022)
and Dalian Maritime Univ. (April 13, 2022)
and the 11th Math. Culture Conf. of China (plenary talk, July 31, 2022)
and Suzhou Univ. (Sept. 23, 2022)

数学发现的背后
Behind Mathematical Discoveries

孙智伟

南京大学数学系

邮箱：zwsun@nju.edu.cn

个人主页：http://maths.nju.edu.cn/∼zwsun

摘要

我们介绍数学发现背后的奥秘，以一些数论与组合上的发现经历为例来揭示如何通过大胆类比、考察均值、巧用OEIS、合理联想等办法创造出新猜想或新结果。希望本报告能对大家做出科研新发现有所启迪。

数学家的几句名言

数学的精髓在于自由。—— Cantor

发明就是选择有意义的组合。—— Poincare

归纳和类比是现代数学的特点。在现代数学里定理让位于理论，而任何真理不过是无穷链中一环。—— Sylverster

科学直觉直接引导与影响数学家们的研究活动，它与审美能力密切相关。在科研中这是唯一只能意会不可言传的才能，但却是每个有作为的数学家不可缺少的能力。——Hankel

Gauss象只狐狸，用尾巴抹平自己在沙地上走过的痕迹。——Klein

一、大胆类比

Euler用类比发现$\sin x$的无穷乘积形式

设$P(x)$是常数项为1的多项式，其全部零点为$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, 则

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right).$$

已知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

从而

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Euler把这与常数项为1的多项式类比，并考虑到$\sin(\pm n\pi) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, 大胆地猜测

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-n\pi}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Euler发现$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

比较上面等式两边的x^2项系数，Euler发现

$$-\frac{1}{3!}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2},$$

亦即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

这回答了Basel提出的求级数和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$问题。

Ramanujan型$\frac{1}{\pi}$级数

根据Stirling公式$n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$ 可知

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

G. Bauer (1859): $\sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)\frac{\binom{2k}{k}^3}{(-64)^k} = \frac{2}{\pi}$.

"An equation for me has no meaning, unless it represents a thought of God."

1914年S. Ramanujan发表他到英国后的第一篇论文，在结尾处不加证明地列出了17个$1/\pi$级数。例如：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(42k+5)\frac{\binom{2k}{k}^3}{4096^k} = \frac{16}{\pi}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{26390k+1103}{396^{4k}}\binom{4k}{k,k,k,k} = \frac{99^2}{2\pi\sqrt{2}}.$$

直到1987年这17个级数等式才完全被证明。

p-adic Γ-函数

设p为奇素数，每个p-adic整数x有唯一的p-adic级数表示

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \quad \text{其中 } a_0, a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, p-1\},$$

它依p-adic范$|x|_p = p^{-\mathrm{ord}_p x}$收敛。注意

$$x \equiv \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k \pmod{p^n} \text{ 且 } \left| x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k \right|_p \leqslant p^{-n} \to 0.$$

每个p-adic整数可视为p-adic收敛的自然数序列的极限。

p-adic Γ-函数: 对正整数n定义

$$\Gamma_p(n) := (-1)^n \prod_{\substack{0<k<n \\ p\nmid k}} k.$$

还约定$\Gamma_p(0) = 1$. 自然数序列$(x_n)_{n\geqslant 0}$的p-adic极限为x时, 定义

$$\Gamma_p(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_p(x_n).$$

$\Gamma_p(\frac{1}{2})$

类似于Euler公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

对$x \in \mathbb{Z}_p$有

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{\{x\}_p},$$

这儿$\{x\}_p$表示唯一的$r \in \{1, \ldots, p\}$ 使得$x \equiv r \pmod{p}$. 特别地,

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{\{1/2\}_p} = (-1)^{(p+1)/2}.$$

对比一下,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi.$$

Legendre符号

设p为奇素数，整数a对p的Legendre符号如下定义：

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}0 & \text{如果}p \mid a,\\ 1 & \text{如果}p\nmid a\text{且 }x^2\equiv a \pmod p\text{有整数解},\\ -1 & \text{如果}p\nmid a\text{且 }x^2\equiv a \pmod p\text{无整数解。}\end{cases}$$

已知

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}=\begin{cases}1 & \text{如果}p\equiv 1 \pmod 4,\\ -1 & \text{如果}p\equiv -1 \pmod 4,\end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}=\begin{cases}1 & \text{如果}p\equiv \pm 1 \pmod 8,\\ -1 & \text{如果}p\equiv \pm 3 \pmod 8.\end{cases}$$

Van Hamme的类比

对奇素数p有$\Gamma_p(\frac{1}{2})^2 = -(\frac{-1}{p})$. 1997年Van Hamme考察$\pi$级数的$p$-adic模拟，提出一系列同余式猜想。例如：相应于Ramanujan级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(6k+1)\frac{\binom{2k}{k}^3}{(-512)^k} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}(42k+5)\frac{\binom{2k}{k}^3}{4096^k} = \frac{16}{\pi},$$

他猜测对奇素数p有

$$\sum_{k=0}^{p-1}(6k+1)\frac{\binom{2k}{k}^3}{(-512)^k} \equiv p\left(\frac{-2}{p}\right) \pmod{p^3},$$

$$\sum_{k=0}^{(p-1)/2}(42k+5)\frac{\binom{2k}{k}^3}{4096^k} \equiv 5p\left(\frac{-1}{p}\right) \pmod{p^4}.$$

到2017年，Van Hamme的p-adic模拟猜想都已被证实。

涉及广义中心三项式系数的$\frac{1}{\pi}$级数

广义中心三项式系数$T_n(b,c)$为$(x^2+bx+c)^n$展开式中x^n项系数。由于$T_n(2,1)=\binom{2n}{n}$，我视$T_n(b,c)$为中心二项式系数的自然推广。

猜想 (孙, 2011, 悬赏300美元).

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{66k+17}{(2^{11}3^3)^k}T_k^3(10,11^2)=\frac{540\sqrt{2}}{11\pi},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{126k+31}{(-80)^{3k}}T_k^3(22,21^2)=\frac{880\sqrt{5}}{21\pi},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3990k+1147}{(-288)^{3k}}T_k^3(62,95^2)=\frac{432}{95\pi}(195\sqrt{14}+94\sqrt{2}).$$

最后这式受我下述猜想启发而来：对素数$p>3$有

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{3990k+1147}{(-288)^{3k}}T_k^3(62,95^2)\equiv\frac{p}{19}\left(17563\left(\frac{-14}{p}\right)+4230\left(\frac{-2}{p}\right)\right)\pmod{p^2}.$$

可行数

正整数n为可行数(practical number)指每个$m = 1, \ldots, n$可表成n的一些不同因子之和，即有n的不同因子$d_1, \ldots, d_k$ 使得

$$\frac{m}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i}.$$

例如：6是可行数，因为$1, 2, 3, 6$整除6，而且$4 = 1 + 3$，$5 = 2 + 3$.

任何正整数有二进制表示，从而可表为不同的2幂次之和。故2的幂次都是可行数。

不超过50的可行数:

1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48.

大于1的可行数都是偶数。

将可行数与素数相对比

类似于$\pi(x) = |\{p \leqslant x:\ p为素数\}|$, 我们定义

$$P(x) = |\{q \leqslant x:\ q\ 为可行数\}|.$$

类似于素数定理$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, 已知

$$P(x) \sim c\frac{x}{\log x} \quad (其中常数c \approx 1.336),$$

这由M. Margenstern在1991年猜测，被A. Weingartner在2014年证明。

类似于Goldbach猜想与孪生素数猜想，关于可行数有下述结果。

定理 (G. Melfi [J. Number Theory 56(1996)]).
(i) 正偶数都可表成两个可行数之和。
(ii) 有无穷多个可行数q使得$q \pm 2$也都是可行数。

素数与可行数的性别

2013年我首次见到可行数这种数。注意大于2的素数都是奇数，而大于1的可行数都是偶数。

在数学系橱窗里，我看到了关于报销教职工子女医疗费的通知，精神是“男单女双”，即单年子女医疗费在父亲单位报销，双年子女医疗费在母亲单位报销。这引导我认识到**素数是男的，可行数是女的**。

如果一对相邻正整数n与$n+1$中一个为素数另一个为可行数，我就称$\{n, n+1\}$为一对**情侣**(couple).

夫妻版Goldbach猜想 (孙, 2013). 大于4的偶数可表成

$$p+q=(p+1)+(q-1),$$

这儿p与q为素数，$p+1$与$q-1$为可行数。

两类“三明治”

考虑到三角恋的存在，我引入两类“三明治”并猜想这两类三明治都有无穷多个。

第一类三明治: $\{p-1, p, p+1\}$, 其中p为素数，$p \pm 1$可行。

第二类三明治: $\{q-1, q, q+1\}$, 其中q可行, $q \pm 1$为素数。

第一类三明治的夹心素数：

$$3, 5, 7, 17, 19, 29, 31, 41, 79, 89, 127, \ldots.$$

第二类三明治的夹心可行数：

$$4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, 108, 150, \ldots.$$

五花肉

现实中也会有比三角恋更复杂的爱情纠纷，这促使我引入“五花肉”的概念。

五花肉：$\{m-2, m-1, m, m+1, m+2\}$, 其中$m, m\pm 2$都可行，且$m\pm 1$为素数。

猜想 (孙，2013)：有无穷多块五花肉。

前一万块五花肉的“心”可见http://oeis.org/A209236. 例如：第三块五花肉为

$$\{16, 17, 18, 19, 20\},$$

其中16, 18, 20为可行数，17与19为素数。

二、考察均值

算术平均

设$n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1 \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = n - 1 \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 1 \in \mathbb{Z}.$$

对于$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, 它们的算术平均为

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

组合数论中的EGZ定理与Kemnitz-Reiher定理

EGZ定理 (P. Erdős, A. Ginzburg, A. Ziv, 1961). 任给$2n-1$个整数$a_1,\ldots,a_{2n-1}$, 可从中选出n个a_i $(i\in I)$ (其中I为$\{1,\ldots,2n-1\}$的n元子集)使得

$$\sum_{i\in I} a_i \equiv 0 \pmod{n},$$

即诸整数a_i $(i\in I)$的算术平均仍为整数。

Kemnitz-Reiher定理 (Kemnitz, 1983; C. Reiher, 2003). 任给$4n-3$个$c_1,\ldots,c_{4n-3}\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, 可从中选出$n$个$c_i$ $(i\in I)$ (其中I为$\{1,\ldots,4n-3\}$的n元子集)使得$\sum_{i\in I} c_i=0$. 换句话说，平面上$4n-3$个整点中必可取出n个使得它们的重心仍为整点。

解析数论中均值估计

数论函数$f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{C}$渐进表现可能很不规则。例如：函数

$$1_P(n)=\begin{cases}1 & \text{如果 } n\text{为素数},\\ 0 & \text{此外},\end{cases}$$

与除数函数

$$d(n)=|\{d\in\mathbb{Z}^+:\ d\mid n\}|$$

如同素数分布一样难寻规律。

当数论函数$f(n)$表现不规则时，解析数论中转看

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)\ (\text{均值})\quad\text{或者}\quad\sum_{n\leqslant x}f(n)\ (\text{部分和})$$

的渐进主项。

素数定理与Dirichlet除数定理

素数定理：

$$\pi(x) := \sum_{n \leqslant x} 1_P(n) = \sum_{p \leqslant x} 1 \sim \frac{x}{\log x} \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

粗略地讲，正整数x为素数的几率大致为$\frac{1}{\log x}$.

Dirichlet除数定理：

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

(其中$\gamma = 0.577\cdots$为Euler常数)，亦即

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} d(n) = \log x + 2\gamma - 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Apéry数

1978年，Apéry证明了$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^3$的无理性。证明过程中他用有理数序列$\{B_n/A_n\}_{n=1}^{\infty}$来逼近$\zeta(3)$, 这儿

$$A_0=1,\ A_1=5,\ B_0=0,\ B_1=6,$$

且$\{A_n\}_{n\geqslant 0}$与$\{B_n\}_{n\geqslant 0}$都满足递推关系

$$(n+1)^3u_{n+1}=(2n+1)(17n^2+17n+5)u_n-n^3u_{n-1}\ (n=1,2,\ldots).$$

事实上，

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}^2\binom{2k}{k}^2,$$

这种数后来被命名为Apéry数。

Beukers猜想

模形式理论中的Dedekind eta函数如下给出：

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

其中$\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $q = e^{2\pi i \tau}$从而$|q| < 1$.

Beukers猜想(1985). 对于素数$p > 3$, 我们有

$$A_{(p-1)/2} \equiv a(p) \pmod{p^2},$$

这里$a(n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$如下给出：

$$\eta^4(2\tau)\eta^4(4\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^4 (1 - q^{4n})^4 = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n.$$

直到2000年，这猜想才被S. Ahlgren与Ken Ono彻底证实。

关于Apéry数的一个猜测

对于奇素数p, 考虑到$A_{(p-1)/2}$模p^2有规律，而且$\frac{p-1}{2}$正好是$0,\ldots,p-1$的“中点”，2010年我在从上海回来的火车上利用均值思想意识到下面这个猜测。

猜想 (孙智伟, 2010). 任给奇素数p, 我们有

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_k$$
$$\equiv \begin{cases} 4x^2-2p \pmod{p^2} & \text{如果 } p\equiv 1,3 \pmod 8\text{且}p=x^2+2y^2\,(x,y\in\mathbb{Z}),\\ 0 \pmod{p^2} & \text{如果 } p\equiv 5,7 \pmod 8.\end{cases}$$

2011年孙智伟证明了此猜测模p成立。直到2019年，此猜想才被王晨与孙智伟(arXiv:1910.06856)最终证明。

Motzkin数的平方和

Catalan数形如

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

第n个Motzkin数

$$M_n := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}$$

是从平面上格点$(0,0)$走到$(n,0)$的符合下述要求的格路条数：每步要么向东$(1,0)$, 要么向东北$(1,1)$, 要么向东南$(1,-1)$, 但不准跑到x轴以下。

猜想 (孙，2010). 设$p > 3$为素数，则

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k^2 \equiv (2-6p)\left(\frac{p}{3}\right) \pmod{p^2}.$$

有关结果

定理 (孙[Adv. Appl. Math. 136(2022)]).

(i) 对任何正整数n有

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)M_k^2\in\mathbb{Z}.$$

(ii) 对任何素数$p>3$, 有

$$\sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)M_k^2\equiv 12p\left(\frac{p}{3}\right)\pmod{p^2}.$$

证明涉及符号计算、q-模拟及组合恒等式。

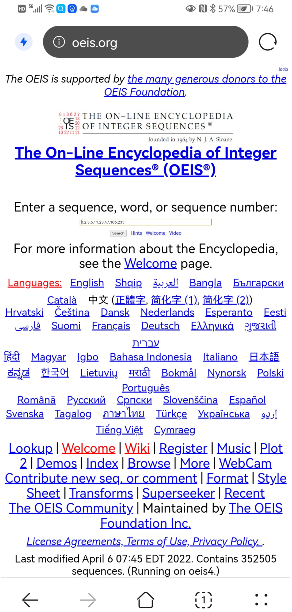
十年前我猜测的同余式

$$\sum_{k=0}^{p-1}M_k^2\equiv(2-6p)\left(\frac{p}{3}\right)\pmod{p^2}\quad(\text{对素数}\,p>3)$$

直到最近才被刘纪彩(arXiv:2208.10275)所证明。

三、巧用OEIS

Sloane创办的整数序列在线百科



OEIS条目一例

100% 6:28

oeis.org/A303656

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A303656 Number of ways to write n as a^2 + b^2 + 3^c + 5^d, where a,b,c,d are nonnegative integers with a <= b. 22

0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 4, 2, 4, 4, 3, 2, 4, 4, 3, 2, 4, 3, 4, 1, 4, 5, 6, 4, 6, 5, 5, 6, 6, 5, 8, 4, 6, 6, 5, 4, 7, 5, 7, 5, 6, 4, 5, 3, 4, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 7, 5, 5, 9, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 5, 7, 7, 4, 5, 5, 5, 4, 6, 5, 6, 10, 5, 4, 5, 7, 4, 9, 2, 9, 8, 5, 6, 6

(list; graph; refs; listen; history; edit; text; internal format)

OFFSET

1,4

COMMENTS

Conjecture: a(n) > 0 for all n > 1. In other words, any integer n > 1 can be written as the sum of two squares, a power of 3 and a power of 5.

It has been verified that a(n) > 0 for all n = 2..2*10^10.

It seems that any integer n > 1 also can be written as the sum of two squares, a power of 2 and a power of 3.

The author would like to offer 3500 US dollars as the prize for the first proof of his conjecture that a(n) > 0 for all n > 1. - Zhi-Wei Sun, Jun 05 2018

Jiao-Min Lin (a student at Nanjing University) has verified a(n) > 0 for all 1 < n <= 2.4*10^11. - Zhi-Wei Sun, Jul 30 2022

LINKS

Zhi-Wei Sun, Table of n, a(n) for n = 1..100000

Zhi-Wei Sun, Refining Lagrange's four-square theorem, J. Number Theory 175(2017), 167-190.

Zhi-Wei Sun, New conjectures on representations of integers (I), Nanjing Univ. J. Math. Biquarterly 34(2017), no. 2, 97-120.

Zhi-Wei Sun, Restricted sums of four squares, arXiv:1701.05868 [math.NT], 2017-2018.

EXAMPLE

a(2) = 1 with 2 = 0^2 + 0^2 + 3^0 + 5^0.
a(5) = 1 with 5 = 0^2 + 1^2 + 3^1 + 5^0.
a(25) = 1 with 25 = 1^2 + 4^2 + 3^1 + 5^1.

MATHEMATICA

```
SQ[n_]:=SQ[n]=IntegerQ[Sqrt[n]];
f[n_]:=f[n]=FactorInteger[n];
g[n_]:=g[n]=Sum[Boole[Mod[Part[Part[f[n], i],
 1], 4]==3&&Mod[Part[Part[f[n], i], 2],
 2]==1], {i, 1, Length[f[n]]}]==0;
QQ[n_]:=QQ[n]=(n==0)||(n>0&&g[n]);
tab={}; Do[r=0; Do[If[QQ[n-3^k-5^m],
 Do[If[SQ[n-3^k-5^m-x^2], r=r+1], {x, 0,
 Sqrt[(n-3^k-5^m)/2]}]], {k, 0, Log[3, n]},
 {m, 0, If[n==3^k, -1, Log[5, n-3^k]]}];
 tab=Append[tab, r], {n, 1, 90}]; Print[tab]
```

CROSSREFS

Cf. A000244, A000290, A000351, A001481, A273812, A302982, A302984, A303233, A303234, A303338, A303363, A303389, A303393, A303399, A303428, A303401, A303429, A303432, A303434, A303539, A303540, A303541, A303543, A303601, A303637, A303639, A303702, A303821.

Sequence in context: A007828 A070804 A303429 * A253630 A104481 A078709

Adjacent sequences: A303653 A303654 A303655 * A303657 A303658 A303659

KEYWORD

nonn,changed

AUTHOR

Zhi-Wei Sun, Apr 27 2018

36

利用OEIS解决问题一例

2010年我给Number Theory List发邮件，猜测

$$\frac{1}{4n\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(21k+8)\binom{2k}{k}^3 \in \mathbb{Z} \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

很快芬兰人Kasper Andersen证出了这个，他发现

$$\frac{1}{4n\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(21k+8)\binom{2k}{k}^3 = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}^2.$$

这样的等式一经发现，就可用Zeilberger算法来证明（等式两边满足同样递推关系）。

利用OEIS解决问题一例

2010年我给Number Theory List发邮件，猜测

$$\frac{1}{4n\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(21k+8)\binom{2k}{k}^3\in\mathbb{Z}\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

很快芬兰人Kasper Andersen证出了这个，他发现

$$\frac{1}{4n\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(21k+8)\binom{2k}{k}^3=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}^2.$$

这样的等式一经发现，就可用Zeilberger算法来证明（等式两边满足同样递推关系）。

我想不出他怎么发现这个奇怪的等式，再三追问下他才告诉我秘密所在：将左边那个序列前几项1，5，46，517 输入到OEIS搜索框，搜一下即发现与下述序列完全一致：

$$\mathrm{A112029}(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}^2\quad(n=0,1,2,\ldots)$$

借助OEIS又一例

对$k \in \mathbb{N}$易见$2k-1 \mid \binom{2k}{k}$，事实上$k \in \mathbb{Z}^+$时

$$\frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k} = \frac{2}{2k-1}\binom{2k-1}{k} = \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} = 2C_{k-1}.$$

类似于Motzkin数，我们定义

$$W_n := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{\binom{2k}{k}}{2k-1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

猜想 (孙[Adv. Appl. Math. 136(2022)]). 设$p > 3$为素数，则对任何$n \in \mathbb{Z}^+$，

$$\frac{\sum_{k=0}^{pn-1} W_k^2 - 2(\sum_{k=0}^{n-1} T_k)^2}{pn} \quad \text{为}p\text{-adic整数，}$$

其中T_k(中心三项式系数)为$(1+x+x^{-1})^k$展开式中常数项。

这里和式$\sum_{k=0}^{n-1} T_k$在$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$处的值分别为1，2，5，12，31，82，参见OEIS条目A097893.

1-3-5猜想

Lagrange四平方和定理 (1770)：每个自然数可表成四个整数的平方和。

1-3-5猜想 (孙, 2016-04-09): $n \in \mathbb{N}$可表成$x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ $(x, y, z, w \in \mathbb{N})$ 使得$x + 3y + 5z$为平方数。

表法唯一的一些例子：

$$
\begin{aligned}
7 =& 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 \text{ 且 } 1 + 3 \times 1 + 5 \times 1 = 3^2,\\
8 =& 0^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 \text{ 且 } 0 + 3 \times 2 + 5 \times 2 = 4^2,\\
31 =& 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 \text{ 且 } 5 + 3 \times 2 + 5 \times 1 = 4^2,\\
43 =& 1^2 + 5^2 + 4^2 + 1^2 \text{ 且 } 1 + 3 \times 5 + 5 \times 4 = 6^2.
\end{aligned}
$$

该猜想于2020年被葡萄牙数学家A. Machiavelo及其博士生N. Tsopanidis利用Hamilton四元数所证明。他们的论文 *"Zhi-Wei Sun's 1-3-5 Conjecture and Variations"*发表于J. Number Theory 222(2021).

悬赏2400美元征解的24-猜想的由来

2016年我也猜测1-3-5猜想中$x+3y+5z$可换成$x+2y$, $x+3y$与$x+24y$中任一个。

24-猜想 (孙, 2017-02-04). $n\in\mathbb{N}$可表成$x^2+y^2+z^2+w^2$ (其中$x,y,z,w\in\mathbb{N}$) 使得x与$x+24y$都是平方数。

此猜想已被侯庆虎验证到10^{10}. 下面是表法唯一的一些例子：

$$
\begin{aligned}
12 =&1^2+1^2+1^2+3^2,\quad 1=1^2,\quad 1+24\times1=5^2;\\
23 =&1^2+2^2+3^2+3^2,\quad 1=1^2,\quad 1+24\times2=7^2;\\
24 =&4^2+0^2+2^2+2^2,\quad 4=2^2,\quad 4+24\times0=2^2;\\
71 =&1^2+5^2+3^2+6^2,\quad 1=1^2,\quad 1+24\times5=11^2.
\end{aligned}
$$

这几个数表成$x^2+y^2+z^2+w^2$ (其中$x,y,z,w\in\mathbb{N}$) 使得$x+24y$为平方数的表法也唯一，参见OEIS条目A273404. 开始没细心观察到相应的x总为平方数。睡梦中被背后的两股热流惊醒后，我才意识到可有两个平方数的要求。

四、合理联想

$\mathbb{N}$上通用和

假设$a_1,\ldots,a_k,n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}^+$，而且$a_1x_1^{n_1}+\ldots+a_kx_k^{n_k}$ $(x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{N})$能表示所有自然数(此时称$a_1x_1^{n_1}+\ldots+a_kx_k^{n_k}$为$\mathbb{N}$上通用和)。任给正整数$N$，每个$n=0,\ldots,N-1$可表示成$\sum_{i=1}^k a_ix_i^{n_i}$ (其中$x_i\in\mathbb{N}$)，于是

$$|\{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k:\ a_1x_1^{n_1}<N,\ \ldots,\ a_kx_k^{n_k}<N\}|\geqslant N,$$

从而

$$N\leqslant\prod_{i=1}^k\left(1+\left(\frac{N}{a_i}\right)^{1/n_i}\right).$$

由于这对任何$N\in\mathbb{Z}^+$成立，我们必有

$$\sum_{i=1}^k\frac{1}{n_i}\geqslant 1.$$

三幂五幂猜想

三幂五幂猜想 (孙, 2018年4月28日). 整数$n>1$总可表成$a^2+b^2+3^c+5^d$, 其中$a,b,c,d\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$.

例子: $5=0^2+1^2+3^1+5^0$, $25=1^2+4^2+3^1+5^1$.

注记. 我对$n\leqslant 2\times10^{10}$验证了此猜想, 并宣布悬赏3500美元征求其证明。2022年林觉民将此猜想验证到2.4×10^{11}.

猜想 (孙, 2018年4月25日). 整数$n>1$总可表成$a^2+b^2+\binom{2c}{c}+\binom{2d}{d}$, 其中$a,b,c,d\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$.

注记. 我对$n\leqslant 2\times10^{10}$验证了此猜想, 2022年林觉民将此猜想进一步验证到10^{11}. 根据Stirling公式,

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,\quad \text{从而}\quad \binom{2n}{n}\sim\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

埃及分数

形如$\frac{1}{n}$（其中n为正整数）的分数叫单位分数。古埃及人考虑把正有理数表成不同单位分数之和（这样的有理数叫埃及分数），例如：他们注意到

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\quad \frac{10}{73}=\frac{1}{11}+\frac{1}{22}+\frac{1}{1606}.$$

1202年Fibonacci证明每个正有理数都可表成不同的单位分数之和，这是因为

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

例如：

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3(3+1)}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}.$$

分母为可行数的单位分数之和

2015年9月初，我给大学生上《离散数学》课，讲Cantor证明实数集不可数，这涉及把$[0,1]$中x表成二进制形式

$$0.x_0x_1x_2\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}=\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ x_n=1}}\frac{1}{2^n}\quad(\text{其中}x_n\in\{0,1\}).$$

第二天早上，我又想起这事。正有理数能表成有限个分母为不同2幂次的单位分数之和吗？有理数分母不是2幂次时肯定不能如此表示。这使我要寻求比2幂次更广的一类数，于是我想到了可行数。

猜想 (孙，2015-09-12). 每个正有理数可表成$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{q_j}$的形式，其中$q_1,\ldots,q_k$为不同的可行数。

例子：

$$\frac{10}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{132}+\frac{1}{176},$$

其中$2,4,8,48,132,176$都是可行数。

2016年11月，David Eppstein证明了我的这个猜想。

有关素数知识

Euler: $\sum_p \frac{1}{p}$ 发散, 其中p过所有素数。

由此知
$$\sum_p \frac{1}{p-1} \quad 与 \quad \sum_p \frac{1}{p+1}$$
都发散。

Dirichlet定理: 如果$a \in \mathbb{Z}$与$m \in \mathbb{Z}^+$互素，则有无穷多个素数$p \equiv a \pmod{m}$.

由此知对每个$m \in \mathbb{Z}^+$有无穷多个素数p使得$p-1$ (或者$p+1$)为m倍数。

形如$p-1$(或$p+1$)的数分布与可行数差不多。

分母为$p-1$或$p+1$的不同单位分数之和

猜测（孙，2015年9月9日）. 任给正有理数$\frac{m}{n}$，有不同的素数$p_1,\ldots,p_k$使得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{p_1-1}+\frac{1}{p_2-1}+\cdots+\frac{1}{p_k-1},$$

也有不同的素数$p_1,\ldots,p_k$使得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{p_1+1}+\frac{1}{p_2+1}+\cdots+\frac{1}{p_k+1}.$$

注：我已宣布为此猜想的证明悬赏500美元。2018年, 韩国牛对分子分母不超过1000的小于1的正有理数验证了此猜想，他还找到不同素数$p_1<\cdots<p_{2065}$ （其中 $p_{2065}\approx 4.7\times 10^{218}$）使得

$$\frac{1}{p_1+1}+\cdots+\frac{1}{p_{2065}+1}=2.$$

例子

例如:

$$
\begin{aligned}
1 =&\frac{1}{2-1} = \frac{1}{3-1} + \frac{1}{5-1} + \frac{1}{7-1} + \frac{1}{13-1}, \\
1 =&\frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{5+1} + \frac{1}{7+1} + \frac{1}{11+1} + \frac{1}{23+1}, \\
\frac{2}{3} =&\frac{1}{3-1} + \frac{1}{7-1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{11+1}, \\
\frac{1}{19} =&\frac{1}{37-1} + \frac{1}{137-1} + \frac{1}{191-1} + \frac{1}{229-1} \\
&+ \frac{1}{331-1} + \frac{1}{397-1} + \frac{1}{761-1} + \frac{1}{1021-1} \\
=&\frac{1}{37+1} + \frac{1}{107+1} + \frac{1}{227+1} + \frac{1}{239+1} \\
&+ \frac{1}{311+1} + \frac{1}{359+1} + \frac{1}{701+1} + \frac{1}{911+1}.
\end{aligned}
$$

$\sum_{d|n}\frac{1}{d+1}\notin\mathbb{Z}$

正整数n为完全数指它的各因子之和为$2n$, 即$\sum_{d|n}\frac{1}{d}=2$. 完全数的例子有6, 28, 496, $\ldots$.

Euclid, Euler: n为偶完全数当且仅当它形如$2^{p-1}(2^p-1)$, 其中p与2^p-1都是素数。

奇完全数问题：是否存在奇完全数？

这问题历经两千多年，至今仍然悬而未决。

猜想 (孙，2015-10-15) 诸有理数

$$\sum_{d|n}\frac{1}{d+1}\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

都不是整数，并且其小数部分两两不同。

此猜测被验证到$n\leqslant 2\times 10^9$.

与第n个素数精确值有关的猜测

对正整数n, 让p_n表示第n个素数。

下述猜测是由极限与同态概念启发而来。

猜想 （孙，2014-09-24). 对每个正整数m有正整数n使得$m+n$整除p_m+p_n, 当$m>2$时还可进一步要求$n<m(m-1)$.

粗略地，$p_m+p_n\equiv 0 \pmod{m+n}$的概率为$\frac{1}{m+n}$. 注意

$$\sum_{n=1}^{m^2-m}\frac{1}{m+n}=\sum_{n=1}^{m^2}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\sim\log m^2-\log m=\log m\to+\infty.$$

故从概率上讲上述猜测是合理的。

此猜测已被验证到$m\leqslant 4\times 10^5$. 例如： $m=79276$时使得$m+n$整除p_m+p_n的最小正整数n为3141281384.

关于第m个素数与第n个素数的和

任给互素的正整数a与b, 依Schinzel假设必有正整数x使得$p = ax + 1$与$q = bx + 1$都是素数，于是有理数$r = a/b$ 可表成

$$\frac{ax}{bx} = \frac{p-1}{q-1}.$$

这启发我把正有理数表成特殊正整数之比。

猜想 (孙，2015-07-03). 正有理数都可表成$\frac{m}{n}$ (其中m, n为正整数)使得$p_m + p_n$为平方数。

已对$m, n \leqslant 1300$验证了此猜想。例如：$2 = \frac{20}{10}$ 且 $p_{20} + p_{10} = 71 + 29 = 10^2$.

相继素数的交错和

猜想 (孙，2012-03-31). 对任何正整数m, 有不超过$2m+2.2\sqrt{m}$的连续一段素数$p_k,\ldots,p_n$ $(k<n)$使得

$$m = p_n - p_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-k}p_k.$$

(对于正奇数m, 甚至可把上界$2m+2.2\sqrt{m}$改成$m+4.6\sqrt{m}$.)

此猜测发表于J. Number Theory 133(2013), 作者悬赏1000美元征求完整的证明。2020年张昶对$m \leqslant 10^9$验证了此猜想。例如:

$$1=3-2,\quad 2=5-3,\quad 3=7-5+3-2,\quad 4=11-7,\quad 5=7-5+3,$$

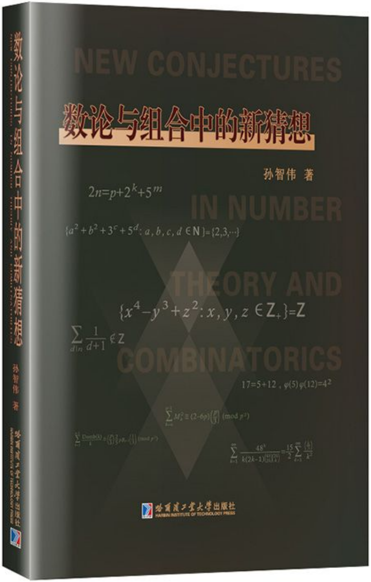
$$8=11-7+5-3+2,\quad 11=19-17+13-11+7,$$

$$20=41-37+31-29+23-19+17-13+11-7+5-3,$$

$$2382=p_{652}-p_{651}+\cdots+p_{44}-p_{43}$$

$$\text{且 } p_{652}=4871=2\cdot 2382+\lfloor 2.2\sqrt{2382}\rfloor.$$

《数论与组合中的新猜想》含820个猜想



长按识别二维码

购买本书

结束语

希望这次讲座能激发大家的创造力!

谢谢!