《数论与组合中的新猜想》中问题的进展

孙智伟

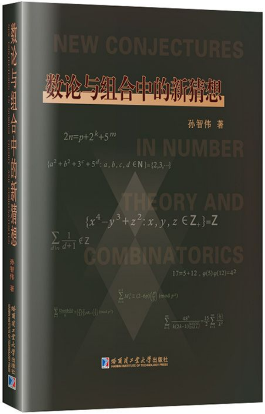
南京大学数学系

邮箱：zwsun@nju.edu.cn

个人主页：http://maths.nju.edu.cn/∼zwsun

2024年3月31日

《数论与组合中的新猜想》



长按识别二维码

购买本书

此书收集了本人提出的八百多个数论与组合方面的猜想，由哈尔滨工业大学出版社在2021年出版.

关于猜想1.12的进展

Lagrange四平方和定理 (1770). 每个自然数可表成四个整数的平方和.

猜想1.12 (2018年3月11日) $n \in \mathbb{N}$可表成$x^2+y^2+z^2+w^2$ $(x,y,z,w \in \mathbb{N})$使得$x+3y$为平方数, 而且x或$2y$为平方数.

本人[JNT, 2017]证明了广义Riemann假设之下每个$n \in \mathbb{N}$可表成$x^2+y^2+z^2+w^2$ $(x,y,z,w \in \mathbb{Z})$使得$x+3y$为平方数.

佘跃峰与伍海亮利用三元二次型理论证明了每个$n \in \mathbb{N}$可表成$x^2+y^2+z^2+w^2$ $(x,y,z,w \in \mathbb{N})$使得$x+3y$为平方数.

Yue-Feng She and Hai-Liang Wu, *Sums of four squares with a certain restriction*, Bull. Aust. Math. Soc. **104** (2021), no.2, 218–227.

Bringmann与Kane在猜想2.28(ii)上取得突破

对于整数$m \geqslant 3$, 广义m角数形如

$$p_m(x) = (m-2)\binom{x}{2} + x = \frac{x((m-2)x-(m-4))}{2} \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

猜想2.28(ii) (2015年3月27日) $m = 7, 9, \ldots, 14$时, 每个自然数n可表成

$$p_m(w) + 2p_m(x) + 4p_m(y) + 8p_m(z) \quad (\text{其中} w, x, y, z \in \mathbb{Z}).$$

K. Bringmann与B. Kane使用模形式证明了此猜想在n充分大时成立.

Kathrin Bringmann and Ben Kane, *Conjectures of Sun about sums of polygonal numbers*, La Matematica **1** (2022), 809–828.

林党民对一些稀疏表示猜想的检验

猜想5.14 (三幂五幂猜想, 2018年4月27日) 任何整数$n > 1$可表成$a^2 + b^2 + 3^c + 5^d$, 其中$a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

本人把这猜想检验到2×10^{10}, 2022年林党民把这个猜想的验证推进到2.4×10^{11}.

猜想5.15 (2018年4月27日) 任何整数$n > 5$可表成$a^2 + b^2 + 2^c + 5 \times 2^d$, 其中$a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

2022年, 林党民发现最小的反例: $n = 18836421387$.

猜想5.18 (2018年4月22日) 任何整数$n > 3$可表成$a^2 + 2b^2 + 3 \times 2^c + 4^d$, 其中$a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

2022年, 林党民发现最小的反例: $n = 12558941213$.

猜想5.27(ii) (2019年6月14日) 任何整数n可表成$(2^a9^b)^2 + c(2c + 1) + d(3d + 1)$, 其中$a, b \in \mathbb{N}$且$c, d \in \mathbb{Z}$.

2022年, 林党民发现最小的反例: $n = 2109982225$.

Banerjee在猜想5.16上取得突破

猜想5.16 (四平方猜想, 2019年6月21日) 任何整数$n>1$可表成$x^2+y^2+(2^a3^b)^2+(2^c5^d)^2$, 其中$x,y,a,b,c,d\in\mathbb{N}$.

2022年林党民把这个猜想的验证推进到1.6×10^{11}.

Banerjee利用二次型理论、模形式以及筛法证明任何整数$n>1$ 都可表示成 $x^2+y^2+(2^a3^bz_1)^2+(2^c5^dz_2)^2$, 其中$x,y,a,b,c,d\in\mathbb{N}$, z_1,z_2要么是0要么是至多396个素数的乘积.

Soumyarup Banerjee, *On a conjecture of Sun about sums of restricted squares*, J. Number Theory **256** (2024), 253–289.

猜想6.76被杨全会与赵立璐证明

猜想6.76 (2013年4月21日). 任给正整数n, 使得n个数

$$k(k^2+1)\ \ (k=1,\ldots,n)$$

模m^2两两不同余的最小正整数m, 就是最小的至少是$\sqrt{n}$的3幂次.

杨全会与赵立璐利用Kloosterman和的估计证明了此猜想.

Quan-Hui Yang and Lilu Zhao, *On a conjecture of Sun involving powers of three*, arXiv:2111.02746, 2021.

关于素数计数函数$\pi(x)$

用$\pi(x)$表示不超过x的素数个数，素数定理断言$\pi(x) \sim x/\log x$.

猜想7.50 (2014年2月9日) 任给整数$n > 1$，诸$\pi(kn)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$之一为素数. 更进一步地，对每个$n \in \mathbb{Z}^+$有正整数$k < 3\sqrt{n} + 3$使得$\pi(kn)$为素数.

本人与赵立璐证明了对任何$n \in \mathbb{Z}^+$集合$\{\pi(kn) : k \in \mathbb{Z}^+\}$包含无穷多个至多是两个素数乘积的殆素数.

Z.-W. Sun and Lilu Zhao, *On the set* $\{\pi(kn) : k = 1, 2, 3, \ldots\}$, J. Comb. Number Theory **11** (2019), 97–102.

猜想7.56(i) (2015年10月7日) 正整数n都可表成$\pi(\frac{k(k+1)}{2}) + \pi(\frac{m(m+1)}{2} + 1)$，其中$k, m \in \mathbb{Z}^+$.

2024年3月朱晨鑫发现反例$n = 241540$.

$(a_n)_{n\geqslant 1}$为加法链指对每个整数$n > 1$有$k, m < n$ 使得$a_n = a_k + a_m$.

猜想7.58 (2015年9月23日) 序列$a_n = \pi(\frac{n(n+1)}{2} + 1)$ $(n \geqslant 1)$为加法链. 对于整数$n > 3$还可写$a_n = a_k + a_m$使得$0 < k < m < n$.

2024年Neil Clift对$2 \leqslant n \leqslant 2^{24}$验证了可写$a_n = a_k + a_m$ $(k, m > 0)$.

猜想8.17与注记8.6中猜想被证明

猜想8.17 (2015年9月) 任給$\varepsilon \in \{\pm 1\}$及正有理数$r$, 有有限个不同素数$p_1, \ldots, p_k$使得

$$r = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j + \varepsilon}.$$

此猜测被Bloom在2023年利用解析数论所证明.

Thomas F. Bloom, *Unit fractions with shifted prime denominators*, arXiv:2305.02659, 2023.

注记8.6 对于整数$n > 2$, 作者在2013年猜测$2^n \pm n$不是三角数.

此猜测被祝辉林及其学生王嘉晖利用丢番图逼近所证实.

Jia-Hui Wang and Hui-Lin Zhu, *On a conjecture of Zhi-Wei Sun and related Diophantine equations*, J. Comb. Number Theory **12** (2020), 217–225.

猜想9.17被郭军伟与尼贺霞证明

猜想9.17 (2019年) 设正整数a与$b > a$互素, 素数$p > 3$满足$p \equiv \pm 1 \pmod{b}$. 则对任何正整数n,

$$\sum_{k=0}^{pn-1} \binom{-\frac{a}{b}}{k}\binom{\frac{a}{b}-1}{k} - (-1)^{\langle -\frac{a}{b}\rangle_p} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-\frac{a}{b}}{k}\binom{\frac{a}{b}-1}{k}$$

除以$(pn)^2\binom{-a/b}{n}\binom{a/b-1}{n}$为$p$-adic整数, 这里$\langle x\rangle_p$表示唯一的$r \in \{0, \ldots, p-1\}$使得$x \equiv r \pmod{p}$.

此猜测被郭军伟与尼贺霞通过q-模拟所证明.

Victor J.W. Guo and He-Xia Ni, *Proof of some supercongruences through a q-microscope*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **117** (2023), no.4, Paper No. 147, 9 pp.

涉及调和数的猜想9.10与9.20

调和数形如$H_n = \sum_{0<k\leqslant n} 1/k\ (n \in \mathbb{N})$.

猜想9.10 (2010年9月23日) 对于素数$p > 3$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\binom{2k}{k}}{k4^k} H_{2k} \equiv \frac{7}{3} pB_{p-3} \pmod{p}.$$

猜想9.20 (2010年10月3日) 设$p \geqslant 5$为素数, 则

$$\sum_{p/2<k<p} \frac{\binom{2k}{k}^2}{k16^k} H_k^{(2)} \equiv \frac{31}{2} p^2 B_{p-5} \equiv -\sum_{p/2<k<p} \frac{\binom{2k}{k}^2}{(2k+1)16^k} H_k^{(2)} \pmod{p^3}.$$

毛国帅与潘颢证明了猜想9.10以及猜想9.20中第一个同余式.

G.-S. Mao and H. Pan, *On two conjectural congruences of Sun involving harmonic numbers*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **117** (2023), Paper No. 102.

G.-S. Mao and H. Pan, *On the supercongruences involving harmonic numbers of order* 2, arXiv:2201.03418.

涉及中心组合数平方的同余式猜想

猜想9.15(i) (2009年11月10日) 对于素数$p\equiv 3 \pmod 4$,

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\pmod{p^3}.$$

作者[FFA 22(2013)]对素数$p\equiv 3 \pmod 4$证明了

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{8^k}\equiv-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}^2}{(-16)^k}\equiv(-1)^{(p+1)/4}2p\Big/\binom{(p+1)/2}{(p+1)/4}\pmod{p^2}.$$

猜想9.19 (2010年3月13日) 设$p>5$为素数, 则

$$\sum_{p/2<k<p}\frac{\binom{2k}{k}^2}{k16^k}\equiv-\frac{21}{2}H_{p-1}\pmod{p^4}.$$

模p^3的本人证过. 毛国帅证实了猜想9.15(i), 9.16, 9.19等.

(1) G.-S. Mao, *Supercongruences involving products of two binomial coefficients modulo p^4*, arXiv:2201.06951. (2) G.-S. Mao, *Proof of two congruence conjectures of Z.-W. Sun* arXiv:2304.04548.

猜想9.24被夏伟证明

猜想9.24 (2019年) (i) 对于$\varepsilon \in \{\pm 1\}$与$l, m, n \in \mathbb{Z}^+$, 多项式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k(2k+1)^{2l-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{-x}{j}^m\binom{x-1}{k-j}^m$$

是整值多项式.

(ii) 对任何$l, n \in \mathbb{Z}^+$, 多项式

$$\frac{(2l-1)!!}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^{2l-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{-x}{j}^2\binom{x-1}{k-j}^2$$

是整值多项式.

第一条在$m = 2$的情形与第二条在$l = 1$的情形被郭军伟解决, 一般情形被夏伟所证明. 下面这篇证明了猜想9.24(ii).

Wei Xia, *Proof of a conjecture of Sun and its extension by Guo*, Ramanujan J. **62** (2023), 617–631.

涉及Franel数的同余式猜想

诸$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3$ $(n \in \mathbb{N})$叫做Franel数.

猜想9.45 (2011年3月9日) 设素数p模3余1, 则

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{f_k}{2^k} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f_k}{(-4)^k} \pmod{p^3}.$$

如果写$p = x^2 + 3y^2$ (其中$x, y \in \mathbb{Z}$且$3 \mid x - 1$), 则有

$$x \equiv \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{p-1} (3k+4) \frac{f_k}{2^k} \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} (3k+2) \frac{f_k}{(-4)^k} \pmod{p^2}.$$

对于素数$p = x^2 + 3y^2$ (其中$x, y \in \mathbb{Z}$且$3 \mid x - 1$), 作者[JNT 133(2013)]证明了$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{f_k}{2^k} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f_k}{(-4)^k} \equiv 2x - \frac{p}{2x} \pmod{p^2}$.

猜想9.45被毛国帅与刘艳证实. 毛国帅还证明了相关的猜想9.47(i).

G.-S. Mao and Y. Liu, *On two congruence conjectures of Z.-W. Sun involving Franel numbers*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, to appear.

猜想9.49与9.93被刘纪彩证明

来自组合计数的Motzkin数形如$M_n := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}C_k$ $(n\in\mathbb{N})$, 其中$C_k=\binom{2k}{k}/(k+1)$为Catalan数.

猜想9.49与9.93 (2010年6月9日) 任给素数$p>3$, 我们有

$$\sum_{k=0}^{p-1}M_k^2\equiv(2-6p)\left(\frac{p}{3}\right)\pmod{p^2},$$

还有$\sum_{k=0}^{p-1}T_kM_k\equiv\frac43\left(\frac{p}{3}\right)+\frac{p}{6}\left(1-9\left(\frac{p}{3}\right)\right)\pmod{p^2}$.

本人[Adv. Appl. Math. 136 (2022)]已证对素数$p>3$有同余式$\sum_{k=0}^{p-1}(2k+1)M_k^2\equiv 12p\left(\frac{p}{3}\right)\pmod{p^2}$.

刘纪彩证实了上述猜想，证明非常艰难，关键的出发点是利用恒等式$M_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}C_{k+1}$.

Ji-Cai Liu, Supercongruences involving Motzkin numbers and central trinomial coefficients, Proc. Edinburgh Math. Soc., to appear. See also arXiv:2208.10275.

猜想9.50被李娜与侯庆虎证明

本人引入类似于Motzkin数的一类新数：

$$W_n := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{\binom{2k}{k}}{2k-1} \ (n \in \mathbb{N}).$$

猜想9.50 (2017年11月14日)

(i) 任给正整数n, 我们有

$$\sum_{k=0}^{n-1} (8k+9) W_k^2 \equiv n \pmod{2n}.$$

(ii) 对于奇素数p, 我们有

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} (8k+9) W_k^2 \equiv 24 + 10 \left(\frac{-1}{p}\right) - 9 \left(\frac{p}{3}\right) - 18 \left(\frac{3}{p}\right) \pmod{p}.$$

李娜与侯庆虎利用符号计算与差分办法证明了此猜想.

Na Li and Qing-Hu Hou, *Reduction on the congruences of partial sums of P-recursive sequences*, arXiv:2312.13613.

猜想9.67被何立鹏证明

Zagier数形如

$$Z_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

猜想9.67 (2011年12月7日) 对于奇素数p, 我们有

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{kZ_k}{8^k} \equiv \left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right)p^2-\left(3+2\left(\frac{-1}{p}\right)\right)p^3 q_p(2) \pmod{p^4},$$

其中$q_p(2)=(2^{p-1}-1)/p$ (Fermat商).

此猜测被本人的学生何立鹏所证明，方法上利用了Zagier数的递推关系

$$(n+2)^2 Z_{n+2} - 4(3(n+1)(n+2)+1)Z_{n+1} + 32(n+1)^2 Z_n = 0.$$

何立鹏, 涉及WZ方法与Zagier数的同余式，南京大学硕士学位论文, 2022.

猜想10.59(i)与10.60被Charlton等人证明

令$H_n=\sum_{0<k\leqslant n}\frac{1}{k}\ (n=0,1,2,\ldots)$, $\beta(4)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^4}$.

猜想10.59(i) (2014年11月21日) 我们有级数等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)^2(-16)^k}\left(5H_{2k+1}+\frac{12}{2k+1}\right)=14\zeta(3).$$

猜想10.60 (2014年11月21日) 我们有级数等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)^3 16^k}\left(9H_{2k+1}+\frac{32}{2k+1}\right)=40\beta(4)+\frac{5}{12}\pi\zeta(3).$$

这两个猜测被来自中美英德的五位数学家联手使用积分与函数方程所证实.

Steven Charlton, Herbert Gangl, Li Lai, Ce Xu and Jianqiang Zhao, *On two conjectures of Sun concerning Apéry-like series*, Forum Math. **35** (2023), no. 6, 1533–1547.

猜想10.62与10.63被徐策与赵健强证明

黄金比指$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618\ldots$.

猜想10.62 (2014年11月29日) 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_{2k}}{k^2\binom{2k}{k}}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k}\right) = \frac{41\zeta(3)+4\pi^2\log\phi}{25},$$

其中Lucas数$L_0, L_1, L_2, \ldots$如下给出: $L_0 = 2,\ L_1 = 1,$
且$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}\ (n \geqslant 1)$.

猜想10.63 (2014年12月7日) 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{k^2\binom{2k}{k}}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k}\right) = \frac{124\zeta(3)+\pi^2\log\left(5^5\phi^6\right)}{50},$$

其中$v_0 = 2,\ v_1 = 5,$ 且$v_{n+1} = 5(v_n - v_{n-1})\ (n \geqslant 1)$.

这两个级数等式被徐策与赵健强用积分办法证明.

C. Xu and J. Zhao, *Sun's three conjectures on Apéry-like sums involving harmonic numbers*, J. Comb. Number Theory **12** (2020), 209–216.

猜想10.68被完全解决

猜想10.68 (2014年11月26日). (i) 我们有级数等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)8^k}\left(\sum_{0\leqslant j<k}\frac{(-1)^j}{2j+1}-\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{16}\pi^2.$$

(ii) 设p为奇素数, 则

$$\sum_{k=(p+1)/2}^{p-1}\frac{\binom{2k}{k}}{(2k+1)8^k}\left(\sum_{0\leqslant j<k}\frac{(-1)^j}{2j+1}-\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\equiv\frac{(\frac{-1}{p})}{16}E_{p-3}\left(\frac{1}{4}\right)\pmod{p}.$$

此猜测第一条被John M. Campbell在2022年证明, 第二条被毛国帅证明.

John Campbell, *On a problem concerning alternating odd harmonic numbers*, hal-03651744, 2022.

G.-S. Mao, *On some congruences involving Apéry-like numbers and harmonic numbers*, 10.13140/RG.2.2.12985.17760.

猜想10.77(i)与10.78(i)中级数等式被区锦昌证明

猜想10.77(i) (2014年8月12日) 我们有级数等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{48^k}{k(2k-1)\binom{4k}{2k}\binom{2k}{k}}=\frac{15}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\frac{k}{3})}{k^2}.$$

猜想10.78(i) (2010年4月5日) 我们有级数等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(28k^2-18k+3)(-64)^k}{k^5\binom{2k}{k}^4\binom{3k}{k}}=-14\zeta(3).$$

这两个级数等式被K. C. Au (区锦昌)利用超几何级数与WZ方法所证明.

Kam Cheong Au, *Multiple zeta values, WZ-pairs and infinite sums computations*, arXiv:2212.02986, 2022.

猜想10.53-10.76中涉及调和数的级数等式都已被证实了，最后遗留的都由区锦昌解决.

猜想11.1与11.17被朱泽华证明

猜想11.1 (2013年9月7日) 给定正整数$n \neq 2, 4$, 有$0, 1, \ldots, n$的全排列$i_0, i_1, \ldots, i_n$使得$i_0 = 0$, $i_n = n$, 而且

$$i_0 + i_1,\ i_1 + i_2,\ \ldots,\ i_{n-1} + i_n,\ i_n + i_0$$

与$n \pm 1$都互素.

作者已证猜想11.1在n为正奇数时成立.

猜想11.17 (2013年10月2日) 设$n > 1$为奇数, 则有模n简化剩余系中元素的一个圆排列$(a_1, \ldots, a_{\varphi(n)})$使得

$$\{a_1 - a_2,\ a_2 - a_3,\ \ldots,\ a_{\varphi(n)-1} - a_{\varphi(n)},\ a_{\varphi(n)} - a_1\}$$

也是模n的简化剩余系.

此猜测在n为奇素数幂次时被孙智伟利用模n的原根来说明.

朱泽华, 南京大学本科毕业论文, 2022. (证明了上两个猜测)

猜想11.22被郭学军等人证明

猜想11.22 (2021年8月) 设$n>1$为整数，ζ为本原n次单位根。

(i) 如果n为偶数，则

$$\sum_{\tau\in D(n)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\zeta^{j-\tau(j)}}=\frac{((n-1)!!)^2}{2^n}=\frac{n!}{4^n}\binom{n}{n/2},$$

这里$D(n):=\{\tau\in S_n:\ \text{对}j=1,\ldots,n\text{都有}\tau(j)\neq j\}$.

(ii) 如果n为奇数，则

$$\sum_{\tau\in D(n-1)}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\zeta^{j-\tau(j)}}=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2,$$

而且

$$\sum_{\tau\in D(n-1)}\operatorname{sign}(\tau)\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{1-\zeta^{j-\tau(j)}}=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2.$$

猜想11.22被郭学军等人证明

上述猜测被郭学军等人证明，他们使用了下述著名结果(参见P.B. Denton等人[Bull. AMS 59 (2022)]).

特征向量-特征值恒等式 设A是复数域上的n阶Hermite矩阵，其n个实特征值为$\lambda_1,\dots,\lambda_n$. 又设列向量$v_n=(v_{n,1},\dots,v_{n,n})^T$是特征值$\lambda_n$相应的特征向量，而且其范数$\|v_n\|=\sqrt{\sum_{j=1}^n|v_{n,j}|^2}$为1. 任給$1\leqslant j\leqslant n$, 让$A_j$为从$A$中删去第$j$行与第$j$列所得的Hermite矩阵, 并设$\lambda_{j,1},\dots,\lambda_{j,n-1}$ 为A_j的n个实特征值. 那么, 我们有

$$|v_{n,j}|^2\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_k)=\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_{j,k}).$$

X. Guo, X. Li, Z. Tao, and T. Wei. The eigenvectors-eigenvalues identity and Suns conjectures on determinants and permanents. Linear Multilinear Algebra, published on line. https://doi.org/10.1080/03081087.2023.2172380.

涉及积和式的猜想11.23(i)

域上方阵$A=[a_{j,k}]_{1\leqslant j,k\leqslant n}$的积和式如下给出:

$$\mathrm{per}(A)=\mathrm{per}[a_{j,k}]_{1\leqslant j,k\leqslant n}=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^{n}a_{j,\sigma(j)}.$$

猜想11.23(i) (2021年8月) 对任何奇素数p, 我们有

$$\mathrm{per}[|j-k|]_{1\leqslant j,k\leqslant p}\equiv-\frac{1}{2}\pmod p$$

与

$$\mathrm{per}[|j-k+1|]_{1\leqslant j,k\leqslant p}\equiv\frac{1}{2}\pmod p.$$

余跃峰与汪涵利用了置换群的共轭等价类证明了这个猜测。

Yue-Feng She and Han Wang, *On some Toeplitz-type matrices over finite fields*, Finite Fields Appl., **91** (2023), Article No. 102268.

猜想11.24被汪涵与孙智伟证明

猜想11.24 (2021年8月31日) 设$n>1$为奇数，ζ为本原n次单位根. 则

$$\sum_{\tau\in D(n-1)}\operatorname{sign}(\tau)\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1+\zeta^{j-\tau(j)}}{1-\zeta^{j-\tau(j)}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{((n-2)!!)^2}{n}.$$

此猜测中其中等式在$\zeta=e^{2\pi i/n}$ 时等价于

$$\det[a_{j,k}]_{1\leqslant j,k\leqslant n-1}=\frac{((n-2)!!)^2}{n},$$

这里$a_{j,k}$在$j\neq k$时取值$\cot\pi\frac{j-k}{n}$, 在$j=k$时取值0.

汪涵与孙智伟利用特征向量-特征值恒等式证明了此猜测。

Han Wang and Zhi-Wei Sun, *Proof of a conjecture involving derangements and roots of unity*, Electron. J. Combin. **30** (2023), no. 2, Paper No. 2.1, 10 pp.

关于$\det M_p$的猜想被王李远与伍海亮证明

猜想11.27 (2018年9月13日) 设p为奇素数, 让M_p表示把$[(\frac{i-j}{p})]_{0\leqslant i,j\leqslant (p-1)/2}$ 的第一行元全换成1 所得的$\frac{p+1}{2}$阶方阵, 并让N_p表示把$[(\frac{i-j}{p})]_{1\leqslant i,j\leqslant (p-1)/2}$的第一行元全换成1所得的$\frac{p-1}{2}$阶方阵. 则

$$\det M_p = (-1)^{\lfloor \frac{p+3}{4} \rfloor} \det N_p = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{4}} & \text{如果} p \equiv 1 \pmod 4, \\ (-1)^{\frac{h(-p)-1}{2}} & \text{如果} p > 3 \text{且} p \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

其中$h(-p)$表示虚二次域$\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$的类数.

2024年王李远与伍海亮利用代数数论、线性代数与Gauss和证明了关于$\det M_p$的猜测, 关于$\det N_p$的猜测仍未解决.

Li-Yuan Wang and Hai-Liang Wu, *A conjecture of Zhi-Wei Sun on determinants of certain Legendre matrices*, arXiv:2401.05853.

猜想11.32被伍海亮等人证明

猜想11.32 (2018年12月) 任给素数 $p > 3$ 及不被 p 整除的整数 d, 对

$$D(d,p) := \left| (i^2 + dj^2)\left(\frac{i^2+dj^2}{p}\right) \right|_{1 \leqslant i,j \leqslant (p-1)/2}$$

我们有

$$\left(\frac{D(d,p)}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{p-1}{4}} & \text{如果} p \equiv 1 \pmod 4, \\ \left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{p+1}{4}}(-1)^{\frac{h(-p)-1}{2}} & \text{如果} p \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

其中$h(-p)$表示虚二次域$\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$的类数.

伍海亮、佘跃峰与王李远证明了此猜测。

H.-L. Wu, Y.-F. She and L.-Y. Wang, *Cyclotomic matrices and hypergeometric functions over finite fields*, Finite Fields Appl. **82** (2022), Article ID 102054, 15 pp.

猜想13.3与13.4被夏先伟与张作儒证明

猜想13.3与13.4 (2014年8月30日) 对$n=1,2,3,\ldots$, 令

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n-1}{k}^2\binom{n+k}{k}^2}{4k^2-1},\ b_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(3k^2+3k+1)\binom{n-1}{k}^2\binom{n+k}{k}^2.$$

则$(a_{n+1}/a_n)_{n\geqslant 3}$与$(b_{n+1}/b_n)_{n\geqslant 1}$都严格递增趋于极限$17+12\sqrt{2}$, 而且序列$(\sqrt[n+1]{a_{n+1}}/\sqrt[n]{a_n})_{n\geqslant 2}$与$(\sqrt[n+1]{b_{n+1}}/\sqrt[n]{b_n})_{n\geqslant 1}$都严格递减趋于1.

本人[Colloq. Math. 154 (2018)]已证$(a_n)_{n\geq 1}$与$(b_n)_{n\geqslant 1}$都是整数序列.

夏先伟与张作儒用符号计算与解析办法证明了这两个猜测。

Ernest X.W. Xia and Zuo-Ru Zhang, *On the log-concavity of the n-th root of a sequence*, J. Symbolic Comp., to appear. See also arXiv:2112.12427.

结束语

虽然《数论与组合中的新猜想》一书中有一批猜想被解决，该书中还有大量（也许更困难的）有趣猜测等待大家去研究。

谢谢！