在台北第一女子中学（2002）与淮阴师范学院（2006）的通俗讲座

数学的魅力

孙 智 伟

(南京大学数学系)

数学也是一种语言。通过数学，自然界在论述； 通过数学，世界的创造者在表达。

-----C. Dillmann

逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还得使用逻辑。

-----P. Boutroux

作为人类精神最原始的创造，只有音乐堪与数学比美。

-----A. N. Whitehead

1. 数学文化的独特性

好多数学家陶醉于美妙的数学世界。匈牙利数学家 Paul Erdos(1913-1996)更是将一生几乎全部奉献给数学，共发表了 1500 篇左右的数学论文。他没有子女也没有结婚，没有工作也没有什么财产。他只对数学感兴趣， 据说每天有 19 个小时花在数学上。数学哪

来的这么大的魅力？

对外行来说,数学实在抽象难懂。数学家似乎孤立于一般文化之外， 被大众视为怪僻而不可理喻之人。Nobel 在设奖时也排斥了数学。数学真可谓**“曲高和寡”** 。

造成这种局面的主要原因在于数学的“**源远流长**”。 两千多年前古希腊 Euclid 建立的平面几何公理体系就令人惊叹不已。在十八世纪， Newton 和 Leibniz 创立的微积分发展应用了一百年，数学已相当辉煌。但在那时，近代物理刚刚诞生，化学仍在萌芽时期，象生物学、心理学等则连想都没想到。

数学是“**是非分明**”的，正确的要求以及任何人都能验证你是否正确，是数学所独有的。解析几何创始人 Descartes 曾考察过多门学科，当他发现只有数学不为权威所左右时决定投身于数学。

2. 纯粹数学与应用数学相辅相成

数学当初是因解决生产实际问题而产生的,运今为止数学的应用已对科学与社会产生了翻天覆地的影响（尽管不那么引人注目)。任何一门学科，如果用不上数学就不够定量不够成熟。有数学王子只称的 Gauss 说：“数学是自然科学的女王，也是自然科学的奴仆”。纯粹数学研究的是数学自身发展所提出的问题,这方面成果未必有实际应用。

数论是研究整数（及有理数）性质的一个传统数学分支，是纯粹数学的典范。Gauss 称“数论是数学的女王”。 Kronecker 说：“上帝

创造了自然数，其它数学都是人造的。”

只能分解成 1 乘自己的大于 1 的整数叫做素数（或质数），50 以下的素数依次为

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47.

数论中著名的 Goldbach 猜想断言“不小于 4 的偶数可表成两个素数之和”（$2n=p+q$），这简称为命题“1+1”。 因其高难度它被誉为“数论皇冠上的明珠”，这一猜想至今仍未解决，目前这方面最好的结果仍是陈景润的“1+2”（充分大的偶数可写成一个素数与不超过两个素数乘积的和）。陈景润呕心沥血探素多年，付出了青春和健康才换来“1+2”。Goldbach 猜想似乎没有实际用途，但最近有人指出它与晶体学约束以及对称群的阶密切相关， 例如：Goldbach 猜想等价于说对每个大于6的偶数n，存在不同的奇素数 p，q 使得对称群 S_n 有个 pq 阶元但 S_{n-1} 没有。

大家知道，勾 3 股 4 弦 5 的直角三角形存在，或者说 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解 $x=3, y=4, z=5$. 1637 年 Fermat 在阅读丢番图（Diophantus）的《算术》一书时作评注说他发现 n=3,4,5,…时方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解，但“书上空白太少写不下他的漂亮证明”。Fermat 去世后，这条 Fermat 大定理很快闻名于世。为寻求证明数学家绞尽脑汁奋斗了三百五十多年，直到 1995 年这一数学界最著名的猜测才被 A. Wiles 彻底证实。Wiles 的这项成果是二十世纪最重大的数学成就之一，其证明动用了现代数学中许多深刻的工具，能看懂其证明的数学家寥寥无几。如此费力解决的 Fermat 大定理连一条有

用的推论都没有， 但对它的研究有力地推动了数学的发展，导致了代数数论的诞生以及代数几何的蓬勃发展。

Collatz 在学生时代就提出了著名的 Collatz 猜想（也称 3x+1 猜想)。任给正整数 a_1，如定义好 a_1，…， a_n，则在 a_n 为奇数时让 $a_{n+1}=3a_n+1$， 在 a_n 为偶数时让 $a_{n+1}=a_n/2$。猜想断言必有正整数 N 使得 $a_N=1$. 据认为数学家在五十至一百年内对这猜测无能为力，这一问题目前也看不出有何用途。

有些应用数学家认为纯粹数学是数学家闭门造车得出来的，没有什么意思。 也有纯粹数学家认为纯数学才优美雅致，不充满铜臭味。Jacobi 在同 Fourier 争论时为纯数学辩护，他说：“Fourier 确实有过这样的看法，认为数学的主要目的是公众的需要和对自然现象的解释，但象他这样一个哲学家应当知道，**科学的唯一目的是人类精神的光荣**。”在《一个数学家的自白》中 Hardy 指出：他的数学研究成果无论对好人与坏人在善与恶方面都毫无用途，为此他感到自豪！

纯粹数学与应用数学实际上是相辅相成的，有时还相互转化。古希腊几何学家 Apollonius（约公元前 262-190）引入了在当时毫无实际用途的圆锥曲线（椭圆、抛物线、双曲线），没想到在十七世纪 Kepler 发现行星围绕恒星运行的轨道竟是以那恒星为焦点之一的椭圆，抛物线也成了被以一定速度抛出去的物体在重力作用下的运行轨迹。另一方面，大地测量与行星轨道的计算促使 Gauss 发展了微分几何与提出最小二乘法。出于纯数学兴趣发展起来的 Riemann 几何与群论后来分别在相对论与量子力学中找到用武之地。X 射线断层照相术

（CAT 与 MRI 扫描技术，俗称 CT）的发展是建立在积分几何的基础上的；数据安全传输常用到深奥的素数理论；在电子通讯中，大范围的高效的网络设计甚至使用了群的无限维表示论。

Hardy 认为 “纯数学总体上比应用数学有用， 因为有用的东西主要是技巧，而数学技巧主要是通过纯数学来传播的。”

数学是一种看不见的文化，它代表人类心灵最高成就之一。

3. 数学的美与和谐

数学有个绝对的起码的标准--正确, 除此外美的取向也很重要。Hardy 强调美观与严肃是评价数学的标准。一位数学家说：“感觉数学的美，感觉数与形的调和，感觉几何学的优雅，这是所有真正数学家都知道的真正美感。”好的数学要求形式简洁、匀称（无罗嗦条件），**一眼看过去有诗一般的韵味**。有意思的是往往美的定理才有用，在什么样的结果才算是美的问题上数学家是“所见略同”的，所谓数学修养也主要指这方面的。

让我们来看一下体现数学美的几个例子。

例 1 （Euler 公式） Euler 发现 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$。特别地，$e^{i\pi}+1=0$. 这把数学中最重要的四个常数 1，i， π，e 通过加法、乘法、指数运算各一次化为 0。你能说这不美吗？

例 2 （四色定理） 在一张平面地图上不论上面的国家有多少也不论相互地理位置任何，总可用四种颜色画地图，使每个国家都被涂上色彩。但任两个相邻国家被着以不同颜色以示区别。[必须指出，

有例子表明三种颜色是不够的。]这条困难的定理最终是通过计算机数月的运行才在1976年解决的。如此简明的四色定理，听起来舒服，想想还很有魅力。

例3（关于等差数列） 长为k的公差为n的等差数列（又称算术级数）如下：

$$a,\ a+n,\ a+2n,\ \cdots,\ a+(k-1)n.$$

1837年Dirichlet使用解析工具证明了整数a与正整数 n互素时无穷长的等差数列

$$a,\ a+n,\ a+2n,\ \cdots,\ a+(k-1)n,\ \cdots\cdots$$

中有无穷多个素数（例如：有无穷多个100倍数加1的素数）。1770年Lagrange与Waring发现长为k的素数等差数列的公差被所有小于k的素数整除，特别地*不存在无穷长的素数等差数列*。1927年van der Waerden证明**把全体正整数随意地放入有限个抽屉中后对任给的正整数k都有个抽屉包含长为k的等差数列**；例如：把素数放入第一个抽屉中而把合数放入第二个抽屉中，那么素数或者合数中含有指定长度的等差数列。1975年Szemeredi证明了Erdos与Turan的一个困难猜想：*如果A为自然数集的子集且A(n)/n在n趋于无穷时有正的上极限（A(n)表示n以下属于A的自然数个数），则A包含任意长度的等差数列*。2004年青年数学家Ben Green（英国人,1977年生）与Terence Tao（陶哲轩，澳籍华裔， 1975年生）将解析数论、组合数学与动力系统相结合成功地证明了著名的Green-Tao定理：**存在任意指定长度的素数等差数列**。这个深刻定理是很惊人的，想一想有长

为 100 亿的素数等差数列，而已发现的最长的素数等差数列只有 23 项。因上述工作 Green 获得 2004 年 Clay 研究奖，而在分析上也颇有建树的 Tao 则荣获 2006 年的 Fields 奖（有数学 Nobel 奖之称）。

例 4（Waring 问题）Lagrange 在 Euler 多年工作基础上证明了每个自然数可表成 4 个整数的平方和。1770 年 Waring 在他的《代数沉思录》中写道：“每个自然数都是 4 个自然数的平方和，9 个自然数的立方和，19 个自然数的 4 次方和，37 个自然数的 5 次方和。一般地，对整数 $k>1$ 存在取值尽可能小的整数 $g(k)$ 使得每个自然数都可表示成 $g(k)$ 个自然数的 k 次方和。”如何确定 $g(k)$ 便是著名的 Waring 问题，1940 年 Hilbert 对一般的 $k>1$ 确立了 $g(k)$ 的存在性。已知 $g(2)=4, g(3)=9, g(4)=19$（1986 年），$g(5)=37$（1964 年陈景润），$g(6)=73$（1940 年），还可证明 k 充分大时 $g(k)=2^k+[(3/2)^k]-2$（其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分）.

数学除了其科学的一面，也有它艺术的一面。Sylvester 说:“数学揭示了思维世界的奥秘，它展开了美和形的深思熟虑，它的各部分之间和谐地互相关联着。数学是完美无暇的，它是宇宙的计划，就像一幅尚未卷起的世界地图展现人们的眼前。 数学是那些创造真理的人们的思维结晶。” 尽管数学不是美学，但当人们亲身经历或回顾其数学研究的历程时，一种不可遏制的愉快油然而生，这难道不是一种美学性的体现吗？Halmos 认为数学是创造性艺术，他将数学与绘画相比：“绘画来自物质现实，数学也是如此——但画家不是照相机，数学家也不是工程师。 在绘画与数学中都有客观的标准，画家讲究

结构、线条、造型、肌理，而数学家则讲究真实、正确、新奇、普遍。”Sylvester 指出：**“难道说音乐不就是感觉中的数学，而数学不就是推理中的音乐吗？两者的灵魂是完全一致的。只不过音乐是梦幻,而数学是现实。”**de Morgan 认为数学发明创造的动力不是推理而是想象力的发挥。可以说数学是最富想象的科学，也是最有理智的艺术。

4. 数学中的哲理

马克思曾说数学是研究数与形的一门学问。1873 年 Cantor 创立了集合论。集合可谓非数非形，这对习惯了代数与几何的数学家来说有些别扭。Cantor 认为“所谓集合是把我们直观或思维中确定的相互间有明确区别的那些对象（叫集合的之素）作为一个整体来考虑。”Cantor 认为两个集合等势（相当于元素个数一样多）指这两个集合间可建立一一对应。在数学家一片嘲笑与攻击声中 Cantor 入住了精神病院并于 1918 年悲惨地死去，但他创立的集合论在二十世纪成了几乎整个数学的基础。

戏剧性地，数学家普遍接受集合论时 Russell（1872-1970）在 1902 年却发现集合论自相矛盾：让

X={集合 x: x 不属于 x},

那么集合 X 属于自己当且仅当它不属于自己。这便是著名的 Russell 悖论，它的一个通俗说法如下：（理发师悖论） 一个村上理发师决心给且仅给本村所有不自己理发的人理发，问他是否该给自己理发？

Russell 悖论暴露出数学的不牢靠，因此引发出第三次数学危机。为避开已有的集合论悖论， Zermelo 在 1908 年提出对集合不加定义而改用公理刻画。后来 Fraenkel 对 Zermelo 的系统作了进一步的改进。现在所用的 ZFC(C 代表选择公理)集论公理系统能发展出绝大部分数学但又避免了已发现的悖论。是否还会有新的悖论出现呢？这尚不可知。

数学的第三次危机导致了三个数学流派的诞生：Russell 为代表的逻辑主义学派，Brouwer 为代表的直觉主义学派，以及 Hilbert 为代表的形式主义学派。形式主义者认为一些基本概念（如集合）怎么描述也不能满意，对它们不能加以定义，公式不过是一堆符号而已。数学的每个分支都应建立公理系统，通过形式的逻辑推导来得出定理。Hilbert 提出一个好的公理系统应有下述三条性质：（1）公理之间的相互独立性，（2）公理系统的不矛盾性（不能既证出某个命题又证出其否定），（3）完备性（即推导出的都是合理的，正确的也都有个证明）。1931 年经验丰富的大数学家 Hilbert 对数学难题的解决充满了信心，他一再强调“我们必须知道，我们必将知道”。

1931 年 2 5 岁的奥地利数学家 Godel (1906-1978)粉碎了 Hilbert 规划，证明了著名的 Godel 不完备性定理：*任何一个包含算术的公理可能行列举出来的相容公理系统中都有一个命题使它及其反面均在该系统内不可证！而且系统的相容性无法在该系统内得到证明！* Godel 定理给数学家、哲学家以极大的震惊，它表明**十全十美是办不到的，逻辑也有局限性！**von Neumann 在授予 Godel 博士

Einstein 勋章时说："Godel 对现代逻辑的贡献是不朽的，它的不朽超过了纪念碑!"既然集合论的 ZFC 系统能发展出算术等数学，如果它是不矛盾的，我们无法证明这一点。要证明算术相容性要跳到算术之外，要说明整个数学的不矛盾性要跳到数学之外。 好比说要弄清楚地球得到放出卫星到地球之外观测；要揭开人脑的奥秘，光靠人似乎不够！在意大利参观一座教堂时，我提到伽利略因坚持日心说而受教会的迫害，当地一位神学教授辩解说："整个世界都是圣母创造的，人只相当于圣母腹中的胎儿，他怎么能弄清母体的奥妙呢？"

组合论中著名的Ramsey定理如下：*任给k个抽屉及正整数q_1，…，q_k，集合 S 有足够多的元素时，不论如何把 S 的全体 k 元子集放入那 k 个抽屉中， 总有$1\leqslant i\leqslant k$使得S有个q_i 元子集其所有 k 元子集都在第 i 个抽屉中*。这个有广泛应用的重要定理也有深刻的哲学含义，它表明足够大的结构中必定包含给定大小的规则子结构，**完全的无序是不可能的**。Ramsey 定理的一个推论断言从平面上足够多的任三点不共线的点中必可选出 m 个使它们构成一个凸 m 边形的顶点（Erdos-Szekeres, 1935）.人们猜想足够多相当于要求点数大于 2^{m-2}.

数学家 Demoulins 说："没有数学，我们无法看穿哲学的深度；没有哲学，人们也无法看穿数学的深度；如果没有这两者，人们就什么也看不透!"